

光折变介质的相位共轭波强度的近似表达式

王学仁

(哈尔滨理工大学光机电研究所, 哈尔滨 150080)

摘 要 以光折变介质中非线性耦合波微分方程的一种精确解为基础, 对在推导这种精确解过程中起重要作用的一个守恒量进行讨论。通过初等变换, 在不同的特殊条件下得到相位共轭波强度的几种近似表达式。与报道的其它近似方法相比, 本近似方法不需要建立及求解简化的微分方程, 因而具有普适、简单的特点。

关键词 非线性光学, 相位共轭波, 四波耦合, 光折变介质。

1 引 言

自 Golomb 等人发表有关光折变介质中非线性耦合波微分方程理论^[1]以来, 出现了该方程的多种精确解法。本文作者曾提出过光折变介质四波耦合过程中中的新守恒量, 并据此推出非线性耦合波微分方程的一种精确解^[2]。这种解法以下简称为守恒量解法。在一些特殊条件下可把比较复杂的非线性微分方程简化, 由简化的微分方程得到相位共轭强度的近似表达式^[1, 3, 4]。本文以守恒量解法为基础, 对一个守恒量进行讨论, 通过初等变换, 得到在不同的特殊条件下相位共轭波强度的近似表达式。

2 守恒量解法概述^[2]

光折变介质中无吸收的四波耦合微分方程组如下^[1]:

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dz} = -\frac{2r}{I_0} [I_1 I_4 + (I_1 I_2 I_3 I_4)^{1/2}], \\ \frac{dI_2}{dz} = -\frac{2r}{I_0} [I_2 I_3 + (I_1 I_2 I_3 I_4)^{1/2}], \\ \frac{dI_3}{dz} = \frac{2r}{I_0} [I_2 I_3 + (I_1 I_2 I_3 I_4)^{1/2}], \\ \frac{dI_4}{dz} = \frac{2r}{I_0} [I_1 I_4 + (I_1 I_2 I_3 I_4)^{1/2}], \end{cases} \quad (1)$$

式中, r 为耦合系数, I_j 为 z 的函数, z 的变化范围为 $0 \sim L$, I_1 和 I_2 分别为正向和反向泵浦光束, I_4 为探测光束, I_3 为 I_4 的相位共轭光束, $I_0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, 已知的边界条件为 $I_1(0) = I_{10}$, $I_4(0) = I_{40}$, $I_2(L) = I_{2L}$, $I_3(L) = 0$ 。

四波耦合过程中的守恒量如下

$$I_1 + I_4 = I_a = I_{10} + I_{40}, \quad (2)$$

$$I_2 + I_3 = I_b = I_{2L}, \quad (3)$$

$$\arctg [1 - (2I_4/I_a)] - \arctg [1 - (2I_3/I_b)] = \beta, \quad (4)$$

β 是与 z 无关的待定常数, 它就是在推导这种精确解过程中起到重要作用的守恒量。

借助于三个守恒量 I_a , I_b 和 β , 可把四元微分方程组简化为一元微分方程式

$$dI_3/dz = 2AI_3(I_b - I_3) + B(I_b - 2I_3)[I_3(I_b - I_3)]^{1/2}, \quad (5)$$

式中

$$A = (r/I_0)[1 + (I_a/I_b) \cos \beta], \quad (6)$$

$$B = (r/I_0)(I_a/I_b) \sin \beta. \quad (7)$$

当 $z = 0$ 时, 微分方程(5)的解为

$$\frac{I_3(0)}{I_{2L}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[2 \arctg \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\phi}{2} \right) \exp [- (A^2 + B^2)^{1/2} I_b L] \right\} - \phi \right], \quad (8)$$

式中

$$\phi = \arctg (B/A), \quad (9)$$

ϕ , A 和 B 都是依赖于 β 的参数。 β 可由求解下面超越方程式确定

$$\arccos [1 - (2I_{40}/I_a)] = 2 \arctg \left\{ \operatorname{tg} (\phi/2) \exp [- (A^2 + B^2)^{1/2} I_b L] \right\} - \phi + \beta. \quad (10)$$

3 对守恒量 β 的讨论

守恒量 β 不仅在推导四波耦合微分方程精确解过程中起过重要作用^[2], 而且在本文推导相位共轭波强度的近似表达式过程中也将起到重要作用。

由(10)式, (9)式, (6)式和(7)式可知, β 是与 I_{10} , I_{40} 和 I_{2L} 密切相关的。图1和图2分别给出 β 与 I_{40}/I_{10} , β 与 I_{2L}/I_{10} 之间的关系。

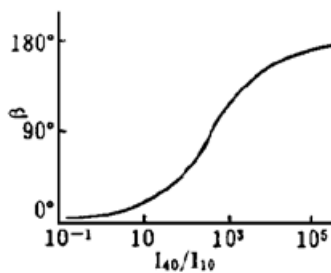


Fig. 1 Conservation quantity β as a function of probe ratio I_{40}/I_{10} for coupling constant $rL = -3$ and for certain pump ratio $I_{2L}/I_{10} = 1$

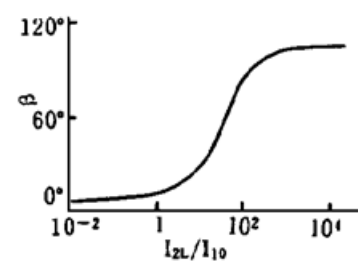


Fig. 2 Conservation quantity β as a function of pump ratio I_{2L}/I_{10} for coupling constant $rL = -3$ and for certain probe ratio $I_{40}/I_{10} = 2$

图1表示当 $rL = -3$ 和 $I_{2L} = I_{10}$ 时 β 与 I_{40}/I_{10} 之间的函数关系。可见, 当 $I_{40}/I_{10} < 1$ 和 $I_{40}/I_{10} > 10^5$ 时, β 增长缓慢; 当 $1 < I_{40}/I_{10} < 10^5$ 时, β 增长较快。 $\beta = 0^\circ$ 和 $\beta = 180^\circ$ 是曲线 $\beta \sim I_{40}/I_{10}$ 的两条渐近线。

图2表示当 $rL = -3$ 和 $I_{40} = 2I_{10}$ 时 β 与 I_{2L}/I_{10} 之间的函数关系。可见, 当 $I_{2L}/I_{10} < 1$ 和 $I_{2L}/I_{10} > 10^3$ 时, β 增长缓慢; 当 $1 < I_{2L}/I_{10} < 10^3$ 时, β 增长较快。 $\beta = 8.13^\circ$ 和 $\beta = 109.47^\circ$ 是曲线 $\beta \sim I_{2L}/I_{10}$ 的两条渐近线。图2与图1中曲线变化趋势相似。

下面分三种情况讨论 β 的近似表达式。

1) $I_a \gg I_b$

当 $I_a \gg I_b$ 时, 由(6)式, (7)式和(9)式可得近似关系式

$$(A^2 + B^2)^{1/2} I_b \approx r, \quad (11)$$

$$\phi \approx \beta. \quad (12)$$

将(11)式, (12)式代入(10)式可得

$$1 - (2I_{40}/I_a) = \cos \{2 \arctg [\operatorname{tg} (\beta/2) \exp (-rL)]\}. \quad (13)$$

经过初等变换可得 β 的近似表达式

$$\beta = 2 \arctg [(I_{40}/I_{10})^{1/2} \exp (rL)]. \quad (14)$$

2) $I_1, I_2 \gg I_3, I_4$

当 $I_1, I_2 \gg I_3, I_4$ 时, 由(4)式可知 $\beta \approx 0$, 因而 $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$, 再由(6)式, (7)式和(9)式可得近似关系式

$$(A^2 + B^2)^{1/2} I_b \approx r, \quad (15)$$

$$\phi \approx I_a \beta / I_0. \quad (16)$$

将(15)式和(16)式代入(10)式可得

$$1 - \left(\frac{2I_{40}}{I_a}\right) = \cos \{2 \arctg [\operatorname{tg} \left(\frac{I_a \beta}{2I_0}\right) \exp (-rL)] - \left(\frac{I_a \beta}{I_0}\right) + \beta\}. \quad (17)$$

由于 $\beta \approx 0$, 有理由认为 $\operatorname{tg} (I_a \beta / 2I_0) \exp (-rL) \ll 1$, 于是

$$2 \arctg [\operatorname{tg} (I_a \beta / 2I_0) \exp (-rL)] \approx (I_a \beta / I_0) \exp (-rL). \quad (18)$$

利用近似展开式 $\cos x \approx 1 - (x^2/2)$ (当 $x \ll 1$ 时), 由(17)式和(18)式可得

$$\beta = 2(I_{40}/I_a)^{1/2} / [(I_a/I_0) \exp (-rL) + (I_b/I_0)]. \quad (19)$$

3) $I_b \gg I_a$

当 $I_b \gg I_a$ 时, 由(6)式, (7)式和(9)式可得

$$(A^2 + B^2)^{1/2} I_b \approx r, \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \phi \approx I_a \sin \beta / I_b. \quad (21)$$

把(20)式和(21)式代入(10)式可得

$$1 - \frac{2I_{40}}{I_a} = \cos \{2 \arctg \left[\frac{I_a \sin \beta}{2I_b} \exp (-rL) - \frac{I_a \sin \beta}{I_b} + \beta\right]\}. \quad (22)$$

这里进一步假定 $\exp (-rL) I_a / I_b \ll 1$, 利用近似式 $\operatorname{tg} x \approx x$ (当 $x \ll 1$ 时), (22)式可变换为

$$1 - (2I_{40}/I_a) = \cos \{(I_a \sin \beta / I_b) [\exp (-rL) - 1] + \beta\}. \quad (23)$$

因为 $(I_a \sin \beta / I_b) [\exp (-rL) - 1] \ll \beta$, (23)式可表示为

$$1 - (2I_{40}/I_a) \approx \cos \beta. \quad (24)$$

由(24)式可得 β 的近似表达式

$$\sin \beta = 2(I_{10} I_{40})^{1/2} / I_a. \quad (25)$$

4 相位共轭波强度的近似表达式

按上面三种情况推导相位共轭波强度的近似表达式。

1) $I_a \gg I_b$

把(11)式, (12)式和(14)式代入(8)式, 通过初等变换可得

$$\frac{I_3(0)}{I_{2L}} = \frac{(I_{40}/I_{10}) [\exp(rL) - 1]^2}{[1 + (I_{40}/I_{10})] [(I_{40}/I_{10}) \exp(2rL) + 1]} \quad (26)$$

(26) 式与文献[3]给出的近似表达式完全相同。

2) $I_1, I_2 \gg I_3, I_4$

把(15)式, (16)式和(19)式代入(8)式, 并考虑到 $\beta \approx 0$, $I_a \approx I_{10}$, 利用近似展开式 $\cos x = 1 - (x^2/2)$ (当 $x \ll 1$ 时) 可得

$$\frac{I_3(0)}{I_{2L}} = \frac{(I_{40}/I_{10}) [\exp(-rL) - 1]^2}{[\exp(-rL) + (I_{2L}/I_{10})]^2} \quad (27)$$

(27) 式与文献[1]给出的近似表达式完全相同。

3) $I_b \gg I_a$

把(20)、(21)和(25)式代入(8)式, 考虑到 $\phi \approx 0$, 利用近似展开式 $\cos x = 1 - (x^2/2)$ (当 $x \ll 1$ 时) 可得

$$\frac{I_3(0)}{I_{2L}} = \frac{I_{40}I_{10}}{I_{2L}^2} [\exp(-rL) - 1]^2 \quad (28)$$

由于这里讨论的条件与文献[4]的不同, 因而不做比较。

结 论 本文以光折变介质中四波耦合过程的守恒量 β 为重点, 在不同的特殊条件下进行变换, 得到相位共轭波强度的几种近似表达式。与已报道的其它近似方法相比, 它不需建立及求解简化的微分方程, 因而具有普适、简单的特点。

参 考 文 献

- [1] M. Cronin-Golomb, B. Fischer, J. O. White *et al.*, Theory and applications of four-wave mixing in photorefractive media. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1984, **QE-20**(1): 12~30
- [2] 王学仁, 光折变介质中四波耦合微分方程组的一种解法及应用. *光学学报*, 1997, **17**(5): 545~549
- [3] P. M. Petersen, P. M. Johansen, Simple theory for degenerate four-wave mixing in photorefractive media. *Opt. Lett.*, 1988, **13**(1): 45~46
- [4] J. Golts, T. Tschudi, Four-wave mixing in photorefractive crystals with depleted pumps: an analytical treatment. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(8): 405~407

Approximate Expressions for Intensity of the Phase-Conjugate Wave in Photorefractive Media

Wang Xueren

(Opto-Mechano-Electronics Institute, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080)

(Received 1 December 1995)

Abstract Based on an exact solution of nonlinear coupled wave differential equations for photorefractive media, a conservative quantity which plays an important role in the process of deriving the exact solution is discussed. By elementary transformantions, several approximate expressions for intensity of the phase-conjugate wave under different special conditions are obtained. As compared with other approximation methods reported, this approximation method is no need of establishing and finding solutions of reduced differential equations, therefore it is characterized by general suitability and simplicity.

Key words nonlinear optics, phase-conjugate wave, four-wave coupling, photorefractive media.