

浅调制下双二波混频: II. 耦合理论

王 锋 刘立人

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 通过耦合波方程的方法, 考虑光折变晶体中存在基频光栅和最低阶的高频和组合光栅, 本文给出了各种情形下的耦合波方程及其解。结果表明一对相干光束的耦合可以被另一束相干的总光强, 相位和调制度等控制。理论上, 利用这种效应, 可以实现相位-振幅转换及振幅-振幅调制。

关键词 双二波耦合, 耦合波方程。

1 引 言

在光折变效应的研究历程中, 首先使用耦合波方程描述光折变耦合特性的是 Steabler 和 Amodel^[1], 而 Kukhtarev^[2] 则促使耦合波方法在后来的研究中得以普遍使用^[3~6]。从双二波混频的内部电场的分析中, 人们知道晶体中不但存在着两个基频光栅(波矢分别为 K_1 和 K_2), 还存在不可或略的组合光栅(波矢为 $K_1 - K_2$ 和 $K_1 + K_2$) 及二阶光栅(波矢分别为 $2K_1$ 和 $2K_2$), 其势必对光束间的耦合产生影响。本文从耦合波方程出发, 研究在各种 K_1 和 K_2 的关系下的耦合情况。

2 耦合波方程

假定两对光束从 $z = 0$ 处入射到光折变晶体中, 为简单起见, 两对光束的频率相同。考虑晶体内部存在六个折射率光栅分量, 波矢分别为 K_1 、 K_2 、 $2K_1$ 、 $2K_2$ 、 $K_1 + K_2$ 和 $K_1 - K_2$, 则总折射率光栅可以写为:

$$\begin{aligned} n = n_0 &+ n_1 \exp(-\phi_1) \frac{A_1 B_1^*}{I_0} \exp(iK_1 x) + n_2 \exp(i\phi_2) \frac{A_2 B_2^*}{I_0} \exp(iK_2 x) \\ &+ n_3 \exp(i\phi_3) \frac{A_1 B_1^* A_2 B_2^*}{I_0^2} \exp[i(K_1 + K_2)x] + n_4 \exp(i\phi_4) \frac{A_1 B_1^* A_2^* B_2}{I_0^2} \exp[i(K_1 - K_2)x] \\ &+ n_5 \exp(i\phi_5) \frac{A_1^2 B_1^{*2}}{I_0^2} \exp(i2K_1 x) + n_6 \exp(i\phi_6) \frac{A_2^2 B_2^{*2}}{I_0^2} \exp(i2K_2 x) + c. c., \end{aligned} \quad (1)$$

$2n_0$ 是光折变晶体的背景折射率, $2n_1$ 、 $2n_2$ 、 $2n_3$ 、 $2n_4$ 、 $2n_5$ 和 $2n_6$ 分别为由内部电场 E_{10} 、 E_{01} 、 E_{11} 、 E_{1-1} 、 E_{20} 和 E_{02} 所决定的折射率幅度, ϕ_i 代表各电场分量和光强之间的相移^[7]。假定扩散为主要运输机制, 从文献[7] 的方程(11~14)可以得到 $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \pi/2$, $\phi_5 = \phi_6$

$= -\pi/2$ 。 I_0 为四束光的总光强。

把(1)式和总振幅表达式(Part I 中的方程(3))代入波方程

$$\nabla^2 E_{opt} + (\omega n/c)^2 E_{opt} = 0,$$

在慢变化近似下可以得出如下四个耦合波方程:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} = & \frac{1}{I_0} \{ \gamma_1 A_1 B_1^* + \gamma_2 A_2 B_2^* \exp [i(K_2 - K_1)x] \\ & - \gamma_4 \frac{A_1^* B_1 A_2 B_2^*}{I_0} \exp [i(K_2 - 2K_1)x] \} B_1, \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_2}{dz} = & \frac{1}{I_0} \{ \gamma_1 A_1 B_1^* \exp [i(K_1 - K_2)x] + \gamma_2 A_2 B_2^* \\ & - \gamma_4 \frac{A_2^* B_2 A_1 B_1^*}{I_0} \exp [i(K_1 - 2K_2)x] \} B_2, \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_1}{dz} = & -\frac{1}{I_0} \{ \gamma_1^* A_1^* B_1 + \gamma_2^* A_2^* B_2 \exp [i(K_1 - K_2)x] \\ & - \gamma_4 \frac{A_2^* B_2 A_1 B_1^*}{I_0} \exp [i(2K_1 - K_2)x] \} A_1, \end{aligned} \quad (2c)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_2}{dz} = & -\frac{1}{I_0} \{ \gamma_1^* A_1^* B_1 \exp [i(K_2 - K_1)x] + \gamma_2^* A_2^* B_2 \\ & + \gamma_4 \frac{A_1^* B_1 A_2 B_2^*}{I_0} \exp [i(2K_2 - K_1)x] \} A_2, \end{aligned} \quad (2d)$$

其中, γ_l 为耦合系数,

$$\gamma_l = \frac{i\omega n_l \exp(i\varphi)}{c \cos \theta_l}, \quad l = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

从方程组(2)可以看出, 波矢为 $K_1 + K_2$ 的光栅对耦合没有任何影响。

方程组(2)表明, 对于不同的 K_1 和 K_2 的关系, 存在四种不同的耦合情况: 1) $K_1 = K_2$; 2) $K_1 = 2K_2$; 3) $K_1 = K_2/2$; 4) 其它。

3 耦合行为

四种情况下的光束耦合行为分别予以讨论。

3.1 $K_1 \neq K_2$, $K_1 \neq 2K_2$ 且 $K_1 \neq K_2/2$

在此条件下, 耦合波方程组(2)简化为

$$dA_j/dz = \gamma_j I_{B_j} A_j / I_0, \quad dB_j/dz = -\gamma_j^* I_{A_j} B_j / I_0, \quad (j = 1, 2) \quad (4)$$

方程(4)是典型的二波混频的耦合波方程形式。和单二波耦合所不同的是, 这里的总光强为四束光强总和而不是相干的两束。其解析解为:

$$\begin{aligned} I_{A_j}(z) = & I_{A_j}(0) \frac{I_{A_j}(0) + I_{B_j}(0)}{I_{A_j}(0) + I_{B_j}(0) \exp(-2\Gamma_j z)}, \\ I_{B_j}(z) = & I_{B_j}(0) \frac{I_{A_j}(0) + I_{B_j}(0)}{I_{B_j}(0) + I_{A_j}(0) \exp(2\Gamma_j z)}, \end{aligned} \quad (5)$$

Γ_j 为耦合放大系数:

$$\Gamma_j [I_{A_j}(0) + I_{B_j}(0)] / I_0 \operatorname{Re} [\mathcal{Y}_j].$$

可以看出, 耦合放大系数可以通过调节另一对光束的总光强从 $\operatorname{Re}[\mathcal{Y}_j]$ 变化到近似零。

3.2 $K_1 = K_2$

由于假设了 $\omega_1 = \omega_2$, 因此在 $K_1 = K_2$ 的条件下有 $\theta_1 = \theta_2$, 由此得出 $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}$ 。耦合波方程组(2)简化为:

$$\frac{dA_j}{dz} = \frac{\mathcal{Y}}{I_0} B_j \sum_{i=1}^2 A_i B_i^*, \quad \frac{dB_j}{dz} = -\frac{\mathcal{Y}}{I_0} A_j \sum_{i=1}^2 B_i A_i^*, \quad (6)$$

此时, 每对相干光束不但通过自身产生的光栅耦合, 还通过另一对相干光束产生的光栅进行耦合。上式即是著名的四波混频的耦合波方程, 迄今为止, 已经出现了多种解的形式^[3-5]。作为多波耦合的一种特例, 参考文献[5]给出的解析解较直观:

$$\begin{aligned} I_{A_j}(z) = & I_{A_j}(0) - \frac{I_{A_j}(0) - I_{B_j}(0)}{2} [1 + \tanh(c\mathcal{Y}z - D) \tanh D - \sec(c\mathcal{Y}z - D) \operatorname{sech} D \\ & - \sqrt{I_{A_j}(0) I_{B_j}(0)} \cos[\phi_{g_j}(0) - \phi_g(0)] [\tanh(c\mathcal{Y}z - D) \operatorname{sech} D \\ & + \operatorname{sech}(c\mathcal{Y}z - D) \tanh D], \end{aligned} \quad (7a)$$

$$I_{B_j}(z) = [I_{A_j}(0) + I_{B_j}(0)] - I_{A_j}(z), \quad (7b)$$

有关参数为:

$$c = \sqrt{f^2(0) + 4|g(0)|^2}, \quad D = \frac{1}{2} \ln \frac{c + f(0)}{c - f(0)}, \quad f(z) = \frac{1}{I_0} \sum_{j=1}^2 [I_{A_j}(z) - I_{B_j}(z)],$$

$$g(z) = \frac{1}{I_0} \sum_{j=1}^2 A_j(z) B_j^*(z), \quad \phi_{g_j}(0) = \phi_A(0) - \phi_{B_j}(0),$$

$$\phi_g(0) = \arctan \left[\frac{\sum_{j=1}^2 A_j(0) B_j(0) \sin \phi_{g_j}(0)}{\sum_{j=1}^2 A_j(0) B_j(0) \cos \phi_{g_j}(0)} \right],$$

ϕ_{A_j} 和 ϕ_{B_j} 分别是光场 A_j 和 B_j 的相位。从上式可以看出, 一对相干光束的耦合不但依赖于其耦合系数 \mathcal{Y} , 还与两对光束的强度及相位差有关。

图 1(a) 显示了光强 I_{A_1} 随第二对光束的相位差的变换, 参数的选取: $\mathcal{Y} = 10/\text{cm}$, $\lambda = 514 \text{ nm}$, $L = 0.5 \text{ cm}$, $\theta = 18^\circ$, $\phi_{A_1} - \phi_{B_1} = 0$ 。在 $m_1 \ll m_2$ 时(曲线 1, $m_1 = 0.01$, $m_2 = 0.1$), 光束对 1 主要通过光束对 2 产生的光栅进行耦合, 光束对 2 的相位差的改变不仅改变光束对 1 的耦合强度, 而且改变其耦合方向; 当 m_1 和 m_2 相当时(曲线 2, $m_1 = m_2 = 0.1$), 两个光栅对某一对光束的耦合的贡献也相当, 在光束对 2 的相位差为 π 时, 光束对 1 之间无耦合现象发生; 当 $m_1 \gg m_2$ 时(曲线 3, $m_1 = 0.1$, $m_2 = 0.01$), 光束对 2 产生的光栅对光束对 1 的耦合行为的影响微乎其微, 可以忽略。

为了使光束对 2 的光强对光束对 1 的耦合影响直观化, 图 1(b) 画出了 $I_{A_1}(L)$ 对 $I_{B_2}(0)$ 的依赖关系。参数设置为: $I_{A_1}(0) = I_{A_2}(0) = 0.1$, $I_{B_1}(0) = 1.0$, $\phi_{A_1} - \phi_{B_1} = 0$ 。可以看出, 当光束对 2 的相位差为 π 时, 最弱的耦合发生在 $I_{B_2}(0) = 1.0$, 这是因为此时两光栅相互抵消; 在 $I_{B_2}(0)$ 变换区间为 $(0, 1)$ 时, $I_{A_1}(L)$ 和 $I_{B_2}(0)$ 呈现出线性关系。

从上述分析可见, 利用共享结构的双二波混频, 可以实现相位-振幅转换, 光-光调制, 非相干-相干转换等; 若使两对相干光束的波长不同, 还能实现波长-波长转换。

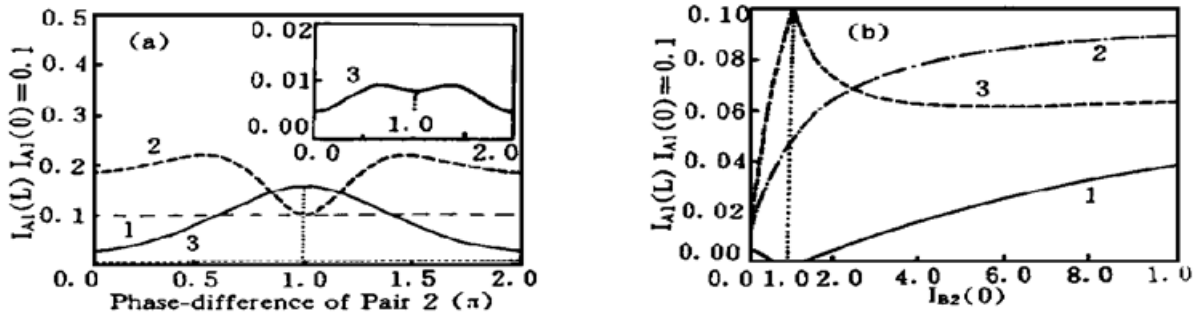


Fig. 1 (a) Coupled intensity of beam A_1 as a function of the phase-difference of beams A_2 and B_2 . curve 1: $I_{A_1}(0) = I_{B_1}(0) = I_{B_2}(0) = 0.1$, $I_{A_2}(0) = 1.0$; curve 2: $I_{A_1}(0) = I_{B_2}(0) = 0.1$, $I_{A_2}(0) = I_{B_1}(0) = 1.0$; curve 3: $I_{A_1}(0) = I_{A_2}(0) = I_{B_2}(0) = 0.1$, $I_{B_1}(0) = 1.0$. (b) Coupled intensity of beam A_1 as a function of the intensity of beam B_2 . Where $I_{A_1}(0) = I_{A_2}(0) = 0.1$, $I_{B_1}(0) = 1.0$. curve 1: $\Delta\phi_2 = \phi_2 - \phi_1 = 0$; curve 2: $\Delta\phi_2 = \pi/2, 3\pi/2$; curve 3: $\Delta\phi_2 = \pi$.

3.3 $K_2 = 2K_1$

在这种条件下, 耦合波方程组(2)变为:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= \left(\frac{\gamma_1}{I_0} A_1 B_1^* - \frac{\gamma_4^*}{I_0^2} A_2 B_2^* A_1 B_1^* \right) B_1, & \frac{dB_1}{dz} &= - \left(\frac{\gamma_1^*}{I_0} B_1 A_1^* - \frac{\gamma_4}{I_0^2} B_2 A_2^* B_1 A_1^* \right) A_1, \\ \frac{dA_2}{dz} &= \left(\frac{\gamma_2}{I_0} A_2 B_2^* + \frac{\gamma_5}{I_0^2} A_1^2 B_1^{*2} \right) B_2, & \frac{dB_2}{dz} &= - \left(\frac{\gamma_2^*}{I_0} B_2 A_2^* + \frac{\gamma_5^*}{I_0^2} B_1^2 A_1^{*2} \right) A_2, \end{aligned} \quad (8)$$

很明显, 每对光束都通过两个光栅耦合。对于光束对 1, 除了基频光栅外, 波矢为 $K_2 - K_1$ 的组合光栅也对耦合有贡献; 对于光束对 2, 除了本身的基频光栅, 光束对 1 产生的二阶光栅 (波矢为 $2K_1$) 同样对耦合产生贡献。这是因为此时 $K_2 - K_1 = K_1$, 而 $2K_2 = K_1$ 。

通过简单的代换, 可以得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_{A_1}}{dz} &= \frac{2\gamma_1}{I_0} \left[1 - q_{41} \frac{c_2}{2I_0} \operatorname{sech} (D_2 + c_2 \gamma_{2z}/I_0) \sin (\Delta\phi_2 - 2\Delta\phi) \right] (c_1 I_{A_1} - I_{A_1}^2), \\ \frac{dI_{A_2}}{dz} &= \frac{2\gamma_2}{I_0} \left[1 + q_{52} \frac{c_1^2}{2c_2 I_0} \frac{\cosh (D_2 + c_2 \gamma_{2z}/I_0)}{\cosh^2 (D_1 + c_1 \gamma_{1z}/I_0)} \sin (\Delta\phi_2 - 2\Delta\phi) \right] (c_2 I_{A_2} - I_{A_2}^2), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

有关参数为:

$$q_{ij} = \gamma_i/\gamma_j, \quad c_i = I_{A_i}(0) + I_{B_i}(0), \quad D_i = \frac{1}{2} \ln [I_{A_i}(0)/I_{B_i}(0)]. \quad (i, j = 1, 2)$$

方程(9)无法给出精确的解析解, 图 2 给出了数值解。图 2(a) 是晶体内的耦合情况: 光束对 2 的相位差为 0 和 π 时, 只有光束对 1 的基频光栅对其耦合有贡献; 对于光束对 2 的相位差为 $\pi/2$ 和 $3\pi/2$, 组合光栅和二阶光栅的影响达到最大, 这点可以从耦合波方程(9) 中的 \sin 项得到解释。由于光束对 1 的相对低的调制度 ($m_1 = 0.01$, $m_2 = 0.1$), 故图 2(a) 中显示了 $2K_1$ 的光栅几乎对光束对 2 的耦合没什么影响, 因为其在如此小的调制度下太弱的缘故。图 2(b) 显示了不同的光束对 2 的相位差时光强 $I_{B_2}(0)$ 对光束 A_1 耦合的影响。

在 $K_1 = 2K_2$ 时将发生相似的耦合行为。

结 论 经过对一系列耦合波方程的求解, 发现在一些特定的条件下, 一阶组合光束和二阶光栅对双二波混频的耦合行为有着不可忽视的影响。其中一对光束的耦合行为, 可能强烈的依赖于另一对光束的强度和相位。由于上述的耦合特性, 原理上可以实现位相信号到振幅信号的转换, 甚至可以实现非相干-相干及波长转换。

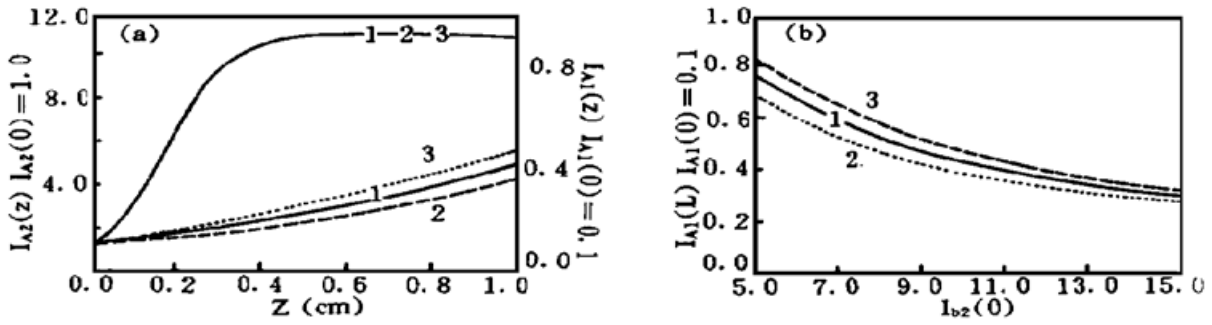


Fig. 2 (a) Intensity of beam A_1 as a function of the depth z within the medium. $\gamma_1 = 10 \text{ cm}^{-1}$, $I_{A_1}(0) = 0.1$, $I_{B_1}(0) = I_{A_2}(0) = 1.0$, $I_{B_2}(0) = 10$. The left coordinate axis is valid for $I_{A_2}(z)$ while the right for $I_{A_1}(z)$. curve 1: $\Delta\phi_2 = 0, \pi$; curve 2: $\Delta\phi_2 = \pi/2$; curve 3: $\Delta\phi_2 = 3\pi/2$.
 (b) $I_{A_1}(L)$ as a function of $I_{B_2}(0)$. curve 1: $\Delta\phi_2 = 0, \pi$; curve 2: $\Delta\phi_2 = \pi/2$; curve 3: $\Delta\phi_2 = 3\pi/2$.

Notice that the solid curve corresponds to the case of only primary gratings being considered. The other parameters are same set as that in Fig. 1

参 考 文 献

- [1] D. L. Staebler, J. J. Amodei, Coupled-wave analysis of holo-graphic storage in LiNbO_3 . *J. Appl. Phys.*, 1972, **43**(3) : 1042~ 1049
- [2] N. V. Kukhtarev, *et. al.*, Holographic storage in electrooptic crystals. II. beam coupling-light amplification. *Ferroelectrics*, 1979, **22** : 961~ 964
- [3] R. Saxena, C. Gu, P. Yeh, Properties of photorefractive gratings with complex coupling constants. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1991, **8**(5) : 1047~ 1052
- [4] M. Cronin-Golomb, J. O. White, B. Fischer *et al.*, Exact solution of a nonlinear model of four-wave mixing and phase conjugation. *Opt. Lett.*, 1982, **7**(7) : 313~ 315
- [5] R. Saxena, F. Vachss, I. McMichael *et al.*, Diffraction properties of multiple-beam photorefractive gratings. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1990, **7**(7) : 1210~ 1215
- [6] C. Gu, P. Yeh, Diffraction properties of fixed gratings in photorefractive media. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1990, **7**(12) : 2339~ 2346
- [7] 王 锋, 刘立人, 浅调制下双二波混频: I.: 内部电场, 光学学报, 1997, **17**(6) : 692~ 696

Double Two-Wave Mixing with Low Modulation: II. Coupling Theory

Wang Feng Liu Liren

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 12 June 1996)

Abstract We theoretically investigate a mixing configuration defined as double two-wave mixing, which consists of two sets of two mutually beams interacting with the same photorefractive volume. Coupled-wave analysis shows that in certain relationships between the two primary gratings' wavevectors, the coupling behavior of the two pairs beams will be seriously influenced by the 2-order ($2K_1$ and $2K_2$) and the cross gratings.

Key words coupled-wave analysis, double two-wave mixing.