

浅调制下双二波混频: I. 内部空间电场

王 锋 刘立人

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 互不相干的两对相干光束同时作用于一块光折变晶体, 在小调制度的情况下(即晶体对光强的反应是线性的), 依然会出现明显的空间频率为两个基频的组合的内部空间电场分量。本文从基本的 Kukhtarev 方程组出发, 把电场和电子数密度直接分解为组合频率的傅里叶分量, 以解析解的形式给出了空间频率分别为 $K_1 - K_2$ 、 $K_1 + K_2$ 、 $2K_1$ 和 $2K_2$ 的电场分量。数值解表明在一定条件下这些高频和组合分量很大且不可忽视。

关键词 双二波耦合, 二波耦合, 基频内部空间电场, 组合频率内部空间电场。

最常见的多波混频是二波混频^{1, 2}和四波混频^{3~5}。当人们考虑互不相干的两对相干光同时作用于一块光折变晶体时(这里称之为双二波混频), 往往只考虑布拉格(Bragg)条件被满足的情形。即使有人考虑了不满足布拉格条件的, 也总是把问题简单地视为两个独立的二波混频行为, 差别仅仅在于由于另一对光束的出现而改变了调制度⁶。显然, 这样的处理是基于双二波混频的内部空间电场是两个独立的二波混频的内部空间电场的简单相加这样的前提。从载流子输运的物理过程看, 事实并非如此。

假设两对相干光的相干条纹的空间频率分别为 K_1 和 K_2 , 在 K_1 光栅的形成过程中, 其光激发载流子的输运必然受到 K_2 电场的影响。 K_1 的光载流子不但有其自身的输运过程(扩散, 漂移或光伏特), 同时还在 K_2 的电场作用下漂移。可见在电流密度中将含有 K_1 和 K_2 的组合分量。在高调制度的情况下, 由于晶体对光强的反应是非线性的, 频率为基频组合的电场分量的研究已经出现在不少文献中^{7~12}。Huignard 等⁹和 Fries 等¹⁰以及 Holmann 等¹¹从理论和实验上给予了证实。最近, Anderson 等¹²借助于三波混频结构, 利用 BSO 晶体对非线性基频组合光栅进行了理论上和实验上的研究。然而, 对于小调制情况(晶体对光强线性响应), 据知, 仍然无人作过理论和实验探讨。本文的主要目的是对此作理论上的研究。结果表明, 小调制情况下, 也会出现频率为基频组合的电场分量, 在一定的条件下, 能和基频分量相比拟。

1 理论模式

光折变输运过程的描述主要有两种模式: 带输运模式和跳跃模式。二者都对光折变给予

了很好的解释。本文采用前者。假设电子为主要的载流子, 由 Kukhtarev 方程组^[1]:

$$\begin{aligned} (\partial n / \partial t) - (\partial N_D^+ / \partial t) &= - \nabla \cdot \mathbf{j} / e, & \partial N_D^+ / \partial t &= (\beta + sI)(N_D - N_D^+) - v_R n N_D^+ \\ \mathbf{j} &= e \mu n \mathbf{E} - k_B T \mu \nabla n + k_C \alpha I, & \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) &= 4\pi e(n + N_A - N_D^+) \end{aligned} \quad (1)$$

n 为电子数密度, N_D 为总施主数密度, N_D^+ 为电离的施主数密度, N_A 为负电离粒子数密度, 其值等于无光时的 N_D^+ , $N_D - N_D^+$ 表示填满的(中性)施主数密度, β 为暗数密度产生速率, s 为光电离截面, I 为光强度, v_R 为复合速率, \mathbf{j} 为电流密度, e 为电子电荷, μ 表示电子迁移率, \mathbf{E} 为总电场(包括外加电场和内部空间电场), k_B 为波耳兹曼常数, T 为温度, k_C 为高斯常数, ϵ 代表稳态介电常数。对于方程(1)作合并可以得到:

$$\begin{aligned} (\partial \mathbf{E} / \partial t) &= - (4\pi / \epsilon) (e \mu n \mathbf{E} - k_B T \mu \nabla n + k_C \alpha I) + (4\pi / \epsilon) \mathbf{J} \\ (\partial n / \partial t) &= (\beta + sI) N_D + (\beta + sI + v_R n) [(\epsilon / 4\pi e) \nabla \cdot \mathbf{E} - n - N_A] \\ &\quad - (1/e) \nabla \cdot (e \mu n \mathbf{E} - k_B T \mu \nabla n + k_C \alpha I) \end{aligned} \quad (2)$$

本文将以此为出发对双二波混频的电场分量进行求解。

2 双二波混频构成

图 1 是双二波混频的构成示意图。光束 A_1 和 B_1 以及 A_2 和 B_2 是两对相干光(下文中分别称之为光束对 1 和光束对 2), 但光束对 1 和光束对 2 不相干。两对光束同时对称入射到一块光折变晶体中。四束光的振幅分别写为 A_1 , B_1 和 A_2 , B_2 。总光场振幅为:

$$\begin{aligned} E_{opt}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \mathbf{e}_{A_j} \cdot \mathbf{A}_j \exp(-i\mathbf{k}_{A_j} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad \times \exp(i\omega_j t) + \sum_{j=1}^2 \mathbf{e}_{B_j} \cdot \mathbf{B}_j \exp(-i\mathbf{k}_{B_j} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad \times \exp(i\omega_j t) + c. c., \end{aligned} \quad (3)$$

\mathbf{e}_{A_j} 和 \mathbf{e}_{B_j} 为偏振矢量, \mathbf{k}_{A_j} 和 \mathbf{k}_{B_j} 为波矢。显然, 总光强可以表达为:

$$I = I_0 + I_1 \exp(-iK_1 x) + I_1^* \exp(iK_1 x) + I_2 \exp(-iK_2 x) + I_2^* \exp(iK_2 x), \quad (4)$$

式中 $I_0 = A_1 A_1^* + A_2 A_2^* + B_1 B_1^* + B_2 B_2^*$, $I_1 = A_1 B_1^* \cos 2\theta_1 = (I_{A_1} I_{B_1})^{1/2} \cos 2\theta_1 \exp[i(\phi_{A_1} - \phi_{B_1})]$, $I_2 = A_2 B_2^* \cos 2\theta_2 = (I_{A_2} I_{B_2})^{1/2} \cos 2\theta_2 \exp[i(\phi_{A_2} - \phi_{B_2})]$, θ_1 和 θ_2 分别是光束对 1 和光束对 2 的入射角, K_1 和 K_2 分别是光束对 1 和光束对 2 的光强条纹波矢, I 代表光束的强度, ϕ 代表光束的位相。

3 小调制度时的解析解

在解普通二波混频过程中, 一般可以把电场展开成 $\exp(-inK)$ 的傅里叶级数形式, 取其零阶解为外加电场分量, 一阶解作为内部空间电场的近似值。如第 1 节所述, 作者认为有组合分量的存在, 因此, 空间电场 $E(x)$ 和电子数密度分布 $n(x)$ 应作如下形式的傅里叶展开:

$$E(x) = \sum_{gl} E_{gl} \exp[-i(gK_1 + lK_2)x], \quad n(x) = \sum_{sh} n_{sh} \exp[-i(sK_1 + hK_2)x], \quad (5)$$

方程(5)中, E_{00} 对应于外加电场, E_{10} 和 E_{01} 对应于光束对 1 和光束对 2 的一阶调制电场, E_{20} 和 E_{02} 对应于光束对 1 和光束对 2 的二阶调制电场, E_{11} 和 E_{1-1} 则分别对应于波矢为 $K_1 + K_2$ 和 $K_1 - K_2$ 的组合电场分量。由于在小调制下各阶都假定为余弦调制, 则 $E_{gl} = E_{-g-l}^*$ 。

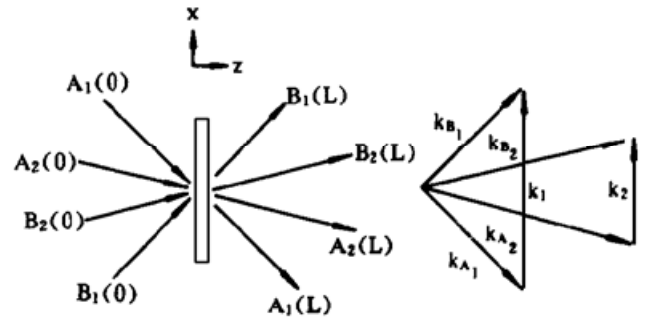


Fig. 1 Schematic representation of the double two-beam coupling in photorefractive media

为简单起见, 本文只考虑稳态。把方程(4)和(5)代入方程(3), 本着保留低阶的近似原则, 可以得到如下的方程组:

$$\begin{aligned} e\mu(n_{20}E_{00} + n_{10}E_{10} + n_{00}E_{20}) + i2k_B T\mu K_1 n_{20} &= 0 \\ e\mu(n_{00}E_{11} + n_{01}E_{10} + n_{10}E_{01} + n_{11}E_{00}) + ik_B T\mu(K_1 + K_2)n_{11} &= 0 \\ e\mu(n_{00}E_{1-1} + n_{0-1}E_{10} + n_{10}E_{0-1} + n_{1-1}E_{00}) + ik_B T\mu(K_1 - K_2)n_{1-1} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{和} \beta + sI_0 + \nu_R n_{00} \left[\frac{\epsilon}{4\pi e} (-i2K_1)E_{20} - n_{20} \right] + (sI_1 + \nu_R n_{10}) \left[\frac{\epsilon}{4\pi e} (-i2K_1)E_{10} - n_{10} \right] \\ + i\mu(2K_1)[n_{20}E_{00} + n_{10}E_{10} + n_{00}E_{20}] - k_B T\mu(2K_1)^2 n_{20}/e = 0, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} (\beta + sI_0 + \nu_R n_{00}) \left\{ \frac{\epsilon}{4\pi e} [-i(K_1 + K_2)]E_{11} - n_{11} \right\} + (sI_1 + \nu_R n_{10}) \left[\frac{\epsilon}{4\pi e} (-iK_2)E_{01} - n_{01} \right] \\ + (sI_2 + \nu_R n_{01}) \left[\frac{\epsilon}{4\pi e} (-iK_1)E_{10} - n_{10} \right] - n_{11}(n_{00} + N_A)\nu_R \\ + iu(K_1 + K_2)(n_{00}E_{11} + n_{11}E_{00} + n_{01}E_{10} + n_{10}E_{01}) - k_B T\mu(K_1 + K_2)^2 n_{11}/e = 0, \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} (\beta + sI_0 + \nu_R n_{00}) \left\{ \frac{\epsilon}{4\pi e} [-i(K_1 - K_2)]E_{1-1} - n_{1-1} \right\} + (sI_1 + \nu_R n_{10}) \left[\frac{\epsilon}{4\pi e} (iK_2)E_{0-1} - n_{0-1} \right] \\ + (sI_2^* + \nu_R n_{0-1}) \left[\frac{\epsilon}{4\pi e} (-iK_1)E_{10} - n_{10} \right] - \nu_R(n_{00} + N_A)n_{1-1} \\ + i\mu(K_1 - K_2)(n_{00}E_{1-1} + n_{1-1}E_{00} + n_{0-1}E_{10} + n_{10}E_{0-1}) - k_B T\mu(K_1 - K_2)^2 n_{1-1}/e = 0, \end{aligned} \quad (7c)$$

在(6)式和(7)式中, 由于电场基频分量 E_{10} 和 E_{01} 已经有了很好的解析解, 故没有列出关于它们的方程。显然, E_{02} 和 E_{20} 具有相似的表达方式(除了所有的下标 10 和 01, 1 和 2, 20 和 02 作代换), 故也没有列出关于 E_{02} 的方程。(6~7)式联合可解出电场分量 E_{20} 、 E_{11} 和 E_{1-1}

$$A_{20} = \frac{2K_1\mu\Gamma_I n_{10}E_{10} - (\Gamma_{E_{20}} + i\Gamma_{d_{20}})\Gamma_{I_1}(A_{10} + n_{10})}{i\Gamma_I\Gamma_{d_i} + \Gamma_I(\Gamma_{E_{20}} + i\Gamma_{d_{20}})}, \quad (8)$$

$$A_{11} = \frac{(K_1 + K_2)\mu(\Gamma_I + \Gamma_R)(n_{01}E_{10} + n_{10}E_{01}) - (\Gamma_{E_{11}} + i\Gamma_{d_{11}})[\Gamma_{I_1}(A_{01} + n_{01}) + \Gamma_{I_2}(A_{10} + n_{10})]}{i(\Gamma_I + \Gamma_R)\Gamma_{d_i} + \Gamma_I(\Gamma_{E_{11}} + i\Gamma_{d_{11}})} \quad (9)$$

$$A_{1-1} = \frac{(K_1 - K_2)\mu(\Gamma_I + \Gamma_R)(n_{01}^*E_{10} + n_{10}E_{01}^*) - (\Gamma_{E_{1-1}} + i\Gamma_{d_{1-1}})[\Gamma_{I_1}(A_{01}^* + n_{01}^*) + \Gamma_{I_2}^*(A_{10} + n_{10})]}{i(\Gamma_I + \Gamma_R)\Gamma_{d_i} + \Gamma_I(\Gamma_{E_{1-1}} + i\Gamma_{d_{1-1}})} \quad (10)$$

其中各参数为: $\Gamma_{d_i} = 4\pi e\mu n_{00}/\epsilon$, $\Gamma_I = sI_0 + \beta + \nu_R n_{00}$, $\Gamma_R = \nu_R(N_A + n_{00})$, $\Gamma_{E_{20}} = 2K_1\mu E_{00}$, $\Gamma_{E_{11}} = (K_1 + K_2)\mu E_{00}$, $\Gamma_{E_{1-1}} = (K_1 - K_2)\mu E_{00}$, $\Gamma_{d_{11}} = (K_1 + K_2)^2 k_B T\mu/e$, $\Gamma_{d_{1-1}} = (K_1 - K_2)^2 k_B T\mu/e$, $\Gamma_{I_1} = sI_1 + \nu_R n_{10}$, $\Gamma_{I_2} = sI_2^* + \nu_R n_{01}^*$, $\Gamma_{d_{20}} = 4K_1^2 k_B T\mu/e$ 。并且, $A_{10} = i\epsilon K_1 E_{10}/(4\pi e)$, $A_{01} = i\epsilon K_2 E_{01}/(4\pi e)$, $A_{11} = i\epsilon(K_1 + K_2)E_{11}/(4\pi e)$, $A_{1-1} = i\epsilon(K_1 - K_2)E_{1-1}/(4\pi e)$, $A_{20} = i\epsilon 2K_1 E_{20}/(4\pi e)$ 。

为了简单起见, 假设: 1) 小调制度且线性吸收可以忽略; 2) 电子是主导地位的载流子; 3) 不存在外加电场, 晶体的光伏特效应可以忽略, 因此扩散为主要的运输机制。

连续光照射下, 稳态时对于大多数光折变晶体有如下近似关系: $\Gamma_{d_i}, \Gamma_I \ll \Gamma_R, \Gamma_{d_i}; sI + \beta \ll \nu_R n; N_A \gg n$ (例如, $N_A \sim 10^{16}/\text{cm}^3$, $n \sim 10^{13}/\text{cm}^3$)。假定两对光束形成的条纹间距都不是很

小, 以致 $E_D/E_q \ll n_{00}/N_A$ 成立 (E_D 是扩散场, E_q 是最大空间电场), 则电场分量 E_{20} , E_{11} 和 E_{1-1} 可以有如下形式的解析解:

$$E_{20} = -m_1 E_{10}/2, \quad E_{02} = -m_2 E_{01}/2, \quad (11)$$

$$E_{11} = -iE_{10}E_{01} \left(\frac{E_{q01} + E_{D11}}{E_{D10}E_{q01}} + \frac{E_{q10} + E_{D11}}{E_{D01}E_{q10}} \right) \left/ \left(1 + \frac{E_{D11}}{E_{q11}} \right) \right., \quad (12)$$

$$E_{1-1} = -iE_{10}E_{01}^* \left(\frac{E_{q01} - E_{D1-1}}{E_{D10}E_{q01}} + \frac{E_{q10} + E_{D1-1}}{E_{D01}E_{q10}} \right) \left/ \left(1 + \frac{E_{D1-1}}{E_{q1-1}} \right) \right., \quad (13)$$

其中, $E_{D11} = k_B T (K_1 + K_2)/e$, $E_{q11} = 4\pi e N_A / [\epsilon (K_1 + K_2)]$, $E_{D1-1} = k_B T (K_1 - K_2)/e$, $E_{q1-1} = 4\pi e N_A / [\epsilon (K_1 - K_2)]$, $E_{D10} = k_B T K_1/e$, $E_{q10} = 4\pi e N_A / (\epsilon K_1)$, $E_{D01} = k_B T K_2/e$, $E_{q01} = 4\pi e N_A / (\epsilon K_2)$, $m_1 = |I_1|/I_0$, $m_2 = |I_2|/I_0$.

4 数值讨论及结论

为了讨论的方便, 本文以一个比例系数 b 表达 K_1 和 K_2 之间的关系: 设 $K_2 = bK_1$.

图 2 显示了各电场分量对 b 的依赖关系, 设定的系数为 $m_1 = m_2 = 0.1$, $K_1 = 10^5/m$. 从图中可以看出, 在可见区域内, 各电场分量都强烈依赖于波矢 (随波矢的增大而增大). 在相同的波矢情形下, 组合分量电场和二阶分量的数值处于等数量级 (一般组合分量电场稍大于二阶分量), 它们和基频分量的差值大约为一个数量级. 当 b 在很小情形下, K_1 和 K_2 差别不大, 此时的基频 E_{10} 和 E_{01} 较接近, 二阶分量 E_{20} 和 E_{02} 也较接近, 但组合分量 E_{1-1} 非常小. E_{11} 的数值大小处于基频和二阶中间. 同时还注意到, 在波矢大于约 7×10^7 时, 各电场分量达到最大值, 之后便随着波矢的最大而减小. 这点和基频分量的性质相似^[1].

图 3 是一定的 b 值时各电场分量对 K_1 的依赖关系. 图 3 (a) 是 K_1 和 K_2 较接近的情况 ($b = 2$), 图 3 (b) 是 K_2 远大于 K_1 的情况 ($b = 100$). E_{1-1} 的数值从 $b = 2$ 开始超过二阶分量, 随着 b 的增大, E_{1-1} 渐渐接近于 E_{11} . 值得注意的是, 对于大的 b 值, E_{11} (和 E_{1-1}) 有可能大于基频分量 E_{10} , 这有可能引起新的光学现象.

总之, 本文给出了双二波混频的各电场分量的解析解. 数值分析表明, 在特定的条件下, 组合电场分量和二阶电场分量将可能具有相当大的数值, 因此有可能产生不可忽略的光学现象或效应.

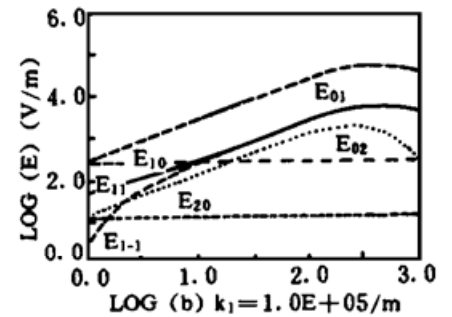


Fig. 2 Each component of the internal electric field as a function of the parameter b which is defined as K_2/K_1 , where $K_1 = 10^5$, $m_1 = m_2 = 0.1$

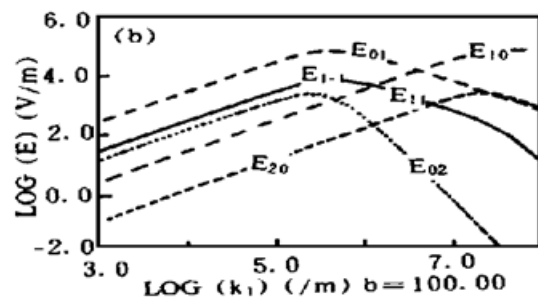
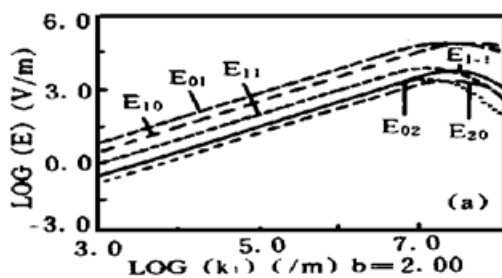


Fig. 3 Each component of the internal electric field as a function of K_1 : (a) $b = 2$; (b) $b = 100$.

Where $m_1 = m_2 = 0.1$

参 考 文 献

- [1] N. V. Kukhtarev, V. B. Markov, S. G. Odoulov *et. al.*, Holographic storage in electrooptic crystals. I. steady state. *Ferroelectrics*, 1979, **22** : 949~ 960
- [2] G. C. Valley, Two-wave mixing with an applied field and a moving grating. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1984, **1**(6) : 868~ 873
- [3] M. Cronin-Golomb, B. Fischer, V. O. White *et. al.*, Theory and application of four-wave mixing in photorefractive media. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1984, **QE-20**(1) : 12~ 30
- [4] J. Goltz, T. Tschudi, Four-wave mixing in photorefractive crystals with depleted pumps: an analytical treatment. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(8) : 405~ 407
- [5] M. Cronin-Golomb, J. O. White, B. Fisoher, Exact solution of a nonlinear model of four-wave mixing and phase conjugation. *Opt. Lett.*, 1982, **7**(7) : 313~ 315
- [6] P. Yeh, Coupled-mode theory of hologram sharing in mutually pumped phase conjugators. *Appl. Opt.*, 1989, **28**(11) : 1961~ 1964
- [7] M. P. Petrov, S. V. Miridonov, S. I. Stepanov *et. al.*, Light diffraction and nonlinear image processing in electrooptic $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ crystal. *Opt. Commun.*, 1979, **31**(3) : 301~ 305
- [8] D. A. Temple, C. Warde, High-order anisotropic diffraction in photorefractive crystals. *J. Opt. Soc. Am.*, 1988, **B5**(8) : 1800~ 1805
- [9] J. P. Huignard, B. Ledu, Collinear Bragg diffraction in photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$. *Opt. Lett.*, 1982, **7**(7) : 310~ 312
- [10] S. Fries, S. Bauschulte, E. Kr tzig *et. al.*, Spatial frequency mixing in lithium niobate. *Opt. Commun.*, 1991, **84**(5, 6) : 251~ 257
- [11] L. Holtmann, E. Kr tzig, S. Odoulov, Coupling of orthogonally polarized waves in BaTiO_3 . *Appl. Phys. (B)*, 1991, **53**(1) : 1~ 5
- [12] P. E. Andersen, P. Buchhave, P. M. Petersen *et. al.*, Nonlinear combinations of gratings in $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$: theory and experiments. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1995, **12**(8) : 1422~ 1433

Double Two-Wave Mixing with Low Modulation: I. Internal Space-Charge Fields

Wang Feng Liu Liren

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 12 June 1996)

Abstract A mixing configuration defined as double two-wave mixing is studied theoretically, which consists of two sets of two mutually beams interacting with the same photorefractive volume. Analytical solutions of the 2-order ($2K_1$ and $2K_2$) and the main combination components ($K_1 + K_2$ and $K_1 - K_2$) of the two primary space-charge field are given. Under certain relations between K_1 and K_2 , the 2-order and the main cross components are so large that can't be neglected.

Key words two-wave mixing, double two-wave mixing, the primary field complement, the second order field component.