

# 光折变介质中四波耦合方程 的一种解法及应用

王学仁

(哈尔滨理工大学光机电研究所, 哈尔滨 150080)

**摘 要** 提出新守恒量的基础上, 推导出光折变介质中四波耦合方程的一种新解法, 并讨论了这种解法在分析相位共轭光束动力学行为中的应用。

**关键词** 光折变介质, 四波耦合, 动力系统, 分叉。

## 1 引 言

四波耦合方程是研究光折变介质光学的理论基础之一。自从 Gronin Golomb 等人有关四波耦合方程的第一种解法<sup>[1]</sup>发表以来, 引起了人们极大的兴趣和广泛的关注。到目前为止, 四波耦合方程已有多种不同解法<sup>[2~8]</sup>。本文在所提出新守恒量的基础上, 推导出四波耦合方程的一种新解法, 并讨论了这种解法在分析相位共轭光束动力学行为中的应用。

## 2 四波耦合方程

在折射结构光折变介质中的四波耦合方程如图 1 所示。 $I_1$  和  $I_2$  分别为正向和反向泵浦光束,  $I_4$  为探测光束,  $I_3$  为相位共轭光束。无吸收四波耦合方程如下<sup>[1]</sup>:

$$\frac{dI_1}{dz} = -\frac{2\gamma}{I_0} [I_1 I_4 + (I_1 I_2 I_3 I_4)^2], \quad (1)$$

$$\frac{dI_2}{dz} = -\frac{2\gamma}{I_0} [I_2 I_3 + (I_1 I_2 I_3 I_4)^2], \quad (2)$$

$$\frac{dI_3}{dz} = \frac{2\gamma}{I_0} [I_2 I_3 + (I_1 I_2 I_3 I_4)^2], \quad (3)$$

$$\frac{dI_4}{dz} = \frac{2\gamma}{I_0} [I_1 I_4 + (I_1 I_2 I_3 I_4)^2], \quad (4)$$

式中  $I_j$  为  $j$  光束强度,  $\gamma$  为耦合系数,

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (5)$$

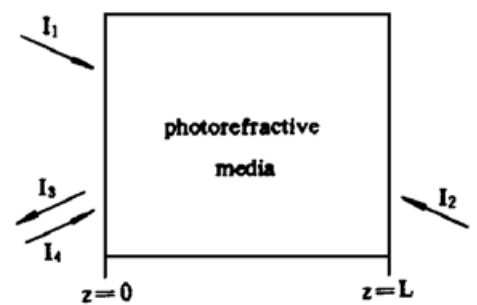


Fig. 1 The configuration for four-wave coupling

$I_j$  的边界条件为

$$I_1(0) = I_{10}, \quad I_2(L) = I_{2L}, \quad I_3(L) = 0, \quad I_4(0) = I_{40}. \quad (6)$$

### 3 守恒量

由(1)式和(4)式可得

$$\frac{d(I_1 + I_4)}{dz} = 0, \quad I_1 + I_4 = I_a = I_{10} + I_{40}; \quad (7)$$

由(2)式和(3)式可得

$$\frac{d(I_2 + I_3)}{dz} = 0, \quad I_2 + I_3 = I_b = I_{2L}. \quad (8)$$

$I_a$  和  $I_b$  即为四波耦合过程的两个明显的守恒量。

把  $I_1 = I_a - I_4$  和  $I_2 = I_b - I_3$  代入(3)式和(4)式, 于是方程组(1)~(4)式简化为

$$\frac{dI_3/dz}{[I_3(I_b - I_3)]^{2'}} = \frac{2\gamma}{I_0}[I_3(I_b - I_3)]^{2'} + \frac{2\gamma}{I_0}[I_4(I_a - I_4)]^{2'}, \quad (9)$$

$$\frac{dI_4/dz}{[I_4(I_a - I_4)]^{2'}} = \frac{2\gamma}{I_0}[I_3(I_b - I_3)]^{2'} + \frac{2\gamma}{I_0}[I_4(I_a - I_4)]^{2'}, \quad (10)$$

由(9)式和(10)式可知

$$\frac{dI_3/dz}{[I_3(I_b - I_3)]^{2'}} = \frac{dI_4/dz}{[I_4(I_a - I_4)]^{2'}} \quad (11)$$

分别对(11)式两边积分<sup>[9]</sup>, 得到一个重要关系式

$$\phi - \theta = \beta, \quad (12)$$

式中

$$\phi = \arccos [1 - (2I_4/I_a)], \quad \theta = \arccos [1 - (2I_3/I_b)]. \quad (13)$$

$\phi$  和  $\theta$  为  $z$  的函数,  $\beta$  为与  $z$  无关的待定积分常数。(12)式和(13)式是作者得到的重要守恒关系式。借助于(12)式可以把(9)式和(10)式进一步简化。

### 4 四波耦合方程的解

由(12)式和(13)式可得  $I_4$  的表示式

$$I_4 = (I_a/2) (1 - \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta). \quad (14)$$

把(14)式代入(9)式可得

$$dI_3/dz = 2AI_3(I_b - I_3) + B(I_b - 2I_3)[I_3(I_b - I_3)]^{2'}, \quad (15)$$

式中

$$A = (\gamma/I_0)[1 + (I_a/I_b) \cos \beta], \quad B = (\gamma/I_0)(I_a/I_b) \sin \beta. \quad (16)$$

借助于(13)式, 不难把关于  $I_3$  的(15)式转化为关于  $\theta$  的方程

$$d\theta/\sin(\theta + \varphi) = (A^2 + B^2)^{2'} I_b dz, \quad (17)$$

式中

$$\varphi = \arctg (B/A), \quad (18)$$

对(17)式两边分别积分<sup>[9]</sup>, 左边的积分下、上限分别为  $\theta(z)$ ,  $\theta(L)$ , 右边的积分下、上限分别为  $z$ ,  $L$ , 得到

$$\ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\theta(L) + \varphi}{2} / \operatorname{tg} \frac{\theta(z) + \varphi}{2} \right] = (A^2 + B^2)^{2\prime} I_b (L - z). \quad (19)$$

由  $I_3(L) = 0$  可知  $\theta(L) = 0$ , 于是  $\theta(z)$  可表示为

$$\theta(z) = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{tg} (\varphi/2) \exp \left[ (A^2 + B^2)^{2\prime} I_b (z - L) \right] \right\} - \varphi. \quad (20)$$

式中的  $\varphi$ ,  $A$  和  $B$  都是依赖于  $\beta$  的参数。对于给定的边界条件, 一旦  $\beta$  确定之后,  $\varphi$ ,  $A$  和  $B$  也就跟着确定了。当  $z = 0$  时, 由(20)式和(12)、(13)式可建立求解  $\beta$  的代数方程

$$1 - (2I_{40}/I_a) = \cos \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} (\varphi/2) \exp \left( - (A^2 + B^2)^{2\prime} I_b L \right) \right] - \varphi + \beta \right\}. \quad (21)$$

采用数值方法, 不难求解方程(21)。

解得  $\beta$  之后, 代入(16)式和(18)式可得  $A$ ,  $B$  和  $\varphi$ , 接下去由(20)式确定  $\theta$ , 再由(13)式确定  $I_3$ :

$$I_3 = (I_b/2)(1 - \cos \theta). \quad (22)$$

由(14)式可确定  $I_4$ ,  $I_4$  和  $I_3$  确定之后, 借助于(7)式、(8)式可分别确定  $I_1$  和  $I_2$ 。

## 5 应 用

作为应用举例, 讨论四波耦合系统的动力学行为与有关参数之间的关系。描述四波耦合系统的微分方程组(1)~(4)式是非线性的, 其稳定性会随着有关参数的变化而变化, 出现分叉等非稳定现象<sup>[10]</sup>。

一般来说, 四波耦合方程组(1)~(4)式的多种解法, 其特点都是建立许多中间变量关系式, 而不是简化微分方程组。本文解法是借助于守恒关系式简化微分方程组, 最后得到单元微分方程(15)。其有关参数为  $\sqrt{L}$ ,  $I_{40}/I_a$ ,  $I_a/I_b$ 。本文只讨论在  $I_a = I_b$  条件下。解随着参数  $I_{40}/I_a$  变化的稳定性(有关其它情况下解稳定性的详细讨论将另文介绍)。

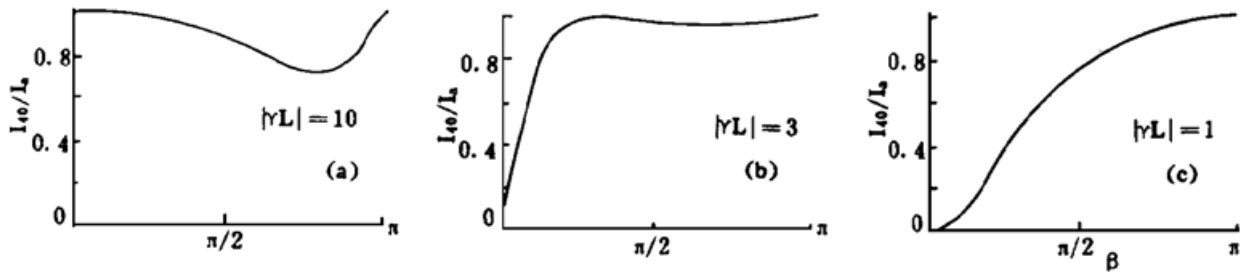
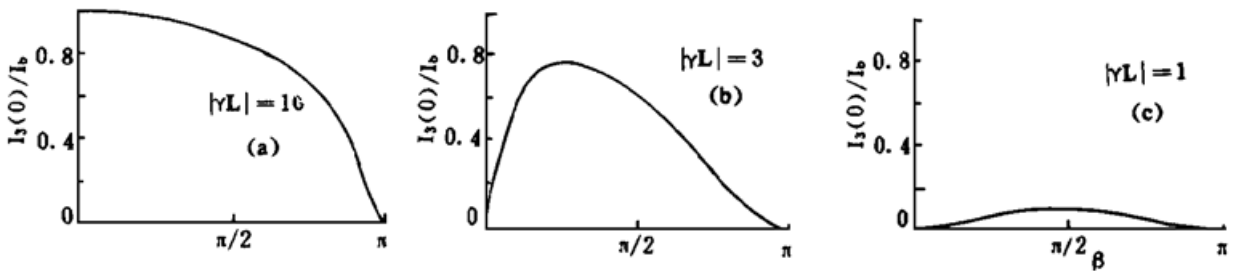
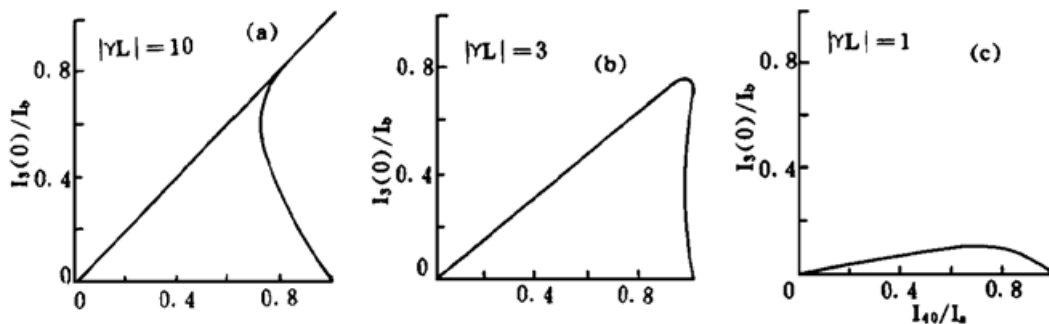
在  $I_a = I_b$  条件下, 由(16)式和(18)式可得  $A = (\sqrt{I_0})(1 + \cos \beta)$ ,  $B = (\sqrt{I_0}) \sin \beta$  和  $\varphi = \beta/2$ , 于是由(21)式和(22)式可得

$$\frac{I_{40}}{I_a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \exp \left( - \sqrt{L} \cos \frac{\beta}{2} \right) \right] + \frac{\beta}{2} \right\}, \quad (23)$$

$$\frac{I_3(0)}{I_b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \exp \left( - \sqrt{L} \cos \frac{\beta}{2} \right) \right] - \frac{\beta}{2} \right\}. \quad (24)$$

对应于不同的  $|\sqrt{L}|$  值,  $I_{40}/I_a$  与  $\beta$  之间的关系曲线如图2所示,  $I_3(0)/I_b$  与  $\beta$  之间的关系曲线如图3所示, 由图2可以看出, 随着  $|\sqrt{L}|$  值的增大, 曲线起始段变得越来越直, 越来越陡; 曲线会出现极小值点, 而且极小值越来越小。由图3可以看出, 随着  $|\sqrt{L}|$  值的增大,  $I_3(0)/I_b$  的极大值越来越大。

对应于不同的  $|\sqrt{L}|$  值,  $I_3(0)/I_b$  与  $I_{40}/I_a$  之间的关系曲线如图4所示。从图4可以看出, 随着  $|\sqrt{L}|$  值的增大,  $I_3(0)/I_b$  会出现分叉, 而且分叉越来越明显, 分叉点对应的  $I_{40}/I_a$  值越来越小; 这说明非线性微分方程(15)的解变得越来越不稳定。

Fig. 2 The curves of  $I_{40}/I_a$  versus  $\beta$ :(a)  $|\gamma L| = 10$ ; (b)  $|\gamma L| = 3$ ; (c)  $|\gamma L| = 1$ Fig. 3 The curves of  $I_3(0)/I_b$  versus  $\beta$ :(a)  $|\gamma L| = 10$ ; (b)  $|\gamma L| = 3$ ; (c)  $|\gamma L| = 1$ Fig. 4 The curves of  $I_3(0)/I_b$  versus  $I_{40}/I_a$ :(a)  $|\gamma L| = 10$ ; (b)  $|\gamma L| = 3$ ; (c)  $|\gamma L| = 1$ 

下面利用(23)式来确定对应临界分叉点的 $|\gamma L|$ 值。对照图2和图4可以得出结论:出现临界分叉点的条件是, $I_{40}/I_a$ 与 $\beta$ 之间关系曲线的极值点应位于 $\beta = \pi$ 处,即

$$d(I_{40}/I_a)/d\beta|_{\beta=\pi} = 0. \quad (25)$$

由(25)式可解得临界值 $|\gamma L| = 2$ 。也就是说,在 $I_a = I_b$ 情况下, $I_3(0)/I_b$ 随参数 $I_{40}/I_a$ 变化时出现分叉的条件为 $|\gamma L| > 2$ 。

**结 论** 本文提出光折变介质中四波耦合过程的守恒量,并利用守恒关系式把四元微分方程组简化为单元微分方程,推导出四波耦合方程的一种新解法,利用这种解法讨论了相位共轭光强稳定性与探测光强的关系。这种新解法推导过程比较简单,使用的中间变量较少,便于对诸如解稳定性等问题进行分析、讨论。作为本文推导出解法的应用,讨论了在 $I_a = I_b$ 情况下解与 $|\gamma L|$ 值有关的分叉现象,出现分叉的条件为 $|\gamma L| > 2$ 。

## 参 考 文 献

- [1] M. Gronin-Golomb, B. Fischer, J. O. White *et al.*, Theory and applications of four-wave mixing in photorefractive media. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1984, **QE-20**(1): 12~ 30
- [2] M. R. Belic, Exact solution to the degenerate four-wave mixing in reflection geometry in photorefractive media. *Phys. Rev. (A)*, 1985, **31**(5): 3167~ 3174
- [3] M. R. Belic, M. Lax, Exact solution to the stationary holographic four-wave mixing in photorefractive crystals. *Opt. Commun.*, 1985, **56**(3): 197~ 201
- [4] A. Bledowski, W. Krolikowski, A. Kujawski, Multistability in reflection grating real-time holography. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1986, **QE-22**(9): 1547~ 1550
- [5] A. Bledowski, W. Krolikowski, Exact solution of degenerate four-wave mixing in photorefractive media. *Opt. Lett.*, 1988, **13**(2): 146~ 148
- [6] A. A. Zozulya, V. T. Tikhonchuk, Solution of nonlinear equations for four-wave interactions in photorefractive media. *Sov. J. Quant. Electron.*, 1988, **18**(8): 981~ 984
- [7] A. Bledowski, W. Krolikowski, A. Kujawski, Temporal instabilities in single-grating photorefractive four-wave mixing. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1989, **6**(8): 1544~ 1547
- [8] M. Belic, Unified method of solution of wave equations in photorefractive media. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1994, **B11**(3): 481~ 485
- [9] 数学手册编写组, 数学手册. 北京: 人民教育出版社, 1979
- [10] P. Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag, 1991

## A Solution of Four-Wave Coupling Equations in Photorefractive Media and Its Application

Wang Xueren

(*Opto-Mechano-Electronics Institute, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080*)

(Received 2 November 1995; revised 15 April 1996)

**Abstract** A new solution of the four-wave coupling equations in photorefractive media is given on the basis of a new conserved quantity proposed by the author. And its application for analysing dynamical behavior of the phase-conjugate beam is discussed.

**Key words** photorefractive media, four-wave coupling, dynamical system, bifurcation.