

耦合系数与时间有关的三能级原子 同辐射场的相互作用*

朱小芹

(淮阴师专物理系, 江苏淮阴 223001)

摘 要 在级联型三能级原子与初始处于相干态的辐射场相互作用的 J-C 模型基础上, 本文研究相互作用耦合系数与时间有关的三能级原子与双模光场的相互作用。运用密度算符方法, 借助数值计算, 分析了该模型原子能级算符和平均光子数的性质, 并作出了一些有意义的讨论。

关键词 含时耦合系数, 级联三能级原子。

1 引 言

自描述二能级原子与单模辐射场相互作用的 Jaynes-Cumming (J-C) 模型^[1]提出以来, 人们对二能级原子与辐射场的相互作用已有了广泛深入的研究。通常把 RWA 近似下的严格可解模型称为 J-C 模型, 近年来又把 Eberly 等人研究的模型称为标准 J-C 模型^[2], 其中如果辐射场在初始时刻处于相干态, 则称为相干态的 J-C 模型。随着人们的深入研究, J-C 模型得到了更进一步推广, 如单原子在理想腔场中的双光子跃迁^[3]以及多原子系统的动力学^[4], 文献 [5] 给出了 J-C 模型在克尔(Kerr)介质中的应用。Law ande 等人研究了 J-C 模型的随机波动性质^[6~9], 即相互作用耦合系数与时间有关的二能级原子同辐射场的相互作用, 使 J-C 模型得到了更进一步的发展。

与此同时, 人们推广了 J-C 模型, 对三能级原子与辐射场的相互作用也作了许多深入的研究工作, 文献 [10, 11] 讨论了级联型三能级原子与单模及多模辐射场的相互作用, 建立了级联三能级 J-C 模型, 文献 [12] 将 J-C 模型推广至“入”型的三能级情况, 借助数值计算讨论了原子能级算符及两个辐射场光子数的系踪平均值随时间的演变规律。然而, 关于耦合系数与时间有关的三能级原子与辐射场的相互作用性能分析尚未见报道。

本文在级联型三能级 J-C 模型基础上研究相互作用耦合系数与时间有关的级联三能级原子与双模辐射场的相互作用, 运用密度算符方法, 借助数值计算, 求得原子能级算符及辐射场平均光子数随时间的变化规律, 分析了模间耦合、双光子跃迁等现象。

* 江苏省教委自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1996 年 8 月 3 日; 收到修改稿日期: 1997 年 1 月 31 日

2 模型与计算

采用如图 1 所示的级联三能级原子模型, 其中能级 $|a\rangle$ 与 $|b\rangle$ 及 $|b\rangle$ 与 $|c\rangle$ 之间的跃迁分别与辐射场模 1 与模 2 相联系, 而 $|a\rangle$ 与 $|c\rangle$ 之间的跃迁是禁戒的。

该系统的哈密顿量(取 $\hbar = 1$) 为:

$$H = H_F + H_A + H_I = H_0 + H_I \quad (1)$$

$$H_F = \sum_{i=1}^2 \Omega_i a_i^\dagger a_i,$$

$$H_A = \omega_a S_{11} + \omega_b S_{22} + \omega_c S_{33},$$

$$H_I = gf(t) (S_{12} a_1 + S_{23} a_2 + H \cdot C) \quad (2)$$

式中 a_i^\dagger 、 a_i 、 Ω_i 分别为模 i 场的产生、湮灭算符和频率, ω_a 、 ω_b 、 ω_c 分别为原子能级 a 、 b 、 c 对应的频率, S_{ij} 为原子投影算符, 当取

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |c\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{使} \quad (3)$$

时, S_{ij} 可表示为三行三列的矩阵, 其矩阵元

$$(S_{ij})_{mn} = \delta_{im} \delta_{jn}, \quad (i, j, m, n = 1, 2, 3)$$

式中 $gf(t)$ 为辐射场与原子间相互作用的耦合系数, 满足条件^[8]

$$f(t) = \begin{cases} kt/T & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

在共振条件 $\Omega_1 = \omega_a - \omega_b$, $\Omega_2 = \omega_b - \omega_c$ 下容易证明 $[H_0, H_I] = 0$, $[H_0, H] = [H_I, H] = 0$ 。于是在相互作用表象中, 时间演化算符可表示为:

$$U(t, 0) = \exp[-i \int_0^t H_I(t') dt'] = \exp[-iM(t)] \quad (5)$$

$$M(t) = g\theta(t) (S_{12} a_1 + S_{23} a_2 + H \cdot C), \quad \theta(t) = \int_0^t f(t') dt' \quad (6)$$

把 $U(t, 0)$ 写成

$$U(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 + a_1 \frac{\cos[g\theta(t)] - 1}{\mu^2} a_1^\dagger & -ia_1 \frac{\sin[g\theta(t)]}{\mu} & a_1 \frac{\cos[g\theta(t)] - 1}{\mu^2} a_2 \\ -i \frac{\sin[g\theta(t)]}{\mu} a_1^\dagger & \cos[g\theta(t)] & -i \frac{\sin[g\theta(t)]}{\mu} a_2 \\ a_2^\dagger \frac{\cos[g\theta(t)] - 1}{\mu^2} a_1 & -ia_2^\dagger \frac{\sin[g\theta(t)]}{\mu} & 1 + a_2^\dagger \frac{\cos[g\theta(t)] - 1}{\mu^2} a_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mu^2 = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2$$

由(7)式可确定密度算符 $\rho(t)$ 的方程

$$\rho(t) = U(t, 0) \rho(0) U^\dagger(t, 0) \quad (8)$$

这样, 确定了初始时刻 ($t = 0$) 密度算符 $\rho(0)$ 的形式后, 任意时刻 $\rho(t)$ 的形式也就确定了。

设辐射场模 1 和模 2 初始时分别处于相干态 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$, 且分别具有平均光子数 $n_1 = |\alpha|^2$ 和 $n_2 = |\beta|^2$, 原子在 $t = 0$ 时处于 $|c\rangle$ 态, 而且初始时刻原子与辐射场之间无相互作用。

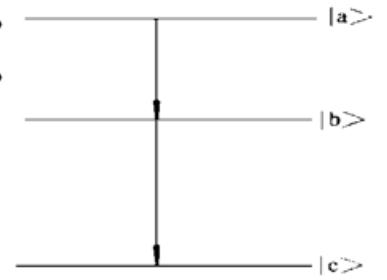


Fig. 1 Fig. of atomic levels

用, 则初始时刻的密度算符为

$$\rho_{FA}(0) = \rho_F(0) \rho_A(0) = \rho_0 \begin{matrix} & \text{模} & & \\ & & \text{场模} & \\ & & & \text{2相} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中

$$\rho_0 = \sum_{m_1 m_1' m_2 m_2'} \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2) \frac{\alpha^{m_1} \alpha^{*m_1'} \beta^{m_2} \beta^{*m_2'}}{\sqrt{m_1! m_1'! m_2! m_2'!}} |m_1 m_2\rangle \langle m_1' m_2'| \quad (10)$$

由(7)~(10)式可求得原子能级算符的系踪平均值以及两个辐射场的平均光子数分别为:

$$\langle S_{11}(t) \rangle = \sum_{n_1 n_2} n_1 n_2 \left[\frac{\cos [g\theta(t)\mu] - 1}{\mu^2} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1} (|\beta|^2)^{n_2}}{n_1! n_2!} \quad (11)$$

$$\langle S_{22}(t) \rangle = \sum_{n_1 n_2} n_2 \left[\frac{\sin [g\theta(t)\mu]}{\mu^2} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1} (|\beta|^2)^{n_2}}{n_1! n_2!} \quad (12)$$

$$\langle S_{33}(t) \rangle = \sum_{n_1 n_2} \left[1 + n_2 \frac{\cos [g\theta(t)\mu] - 1}{\mu^2} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1} (|\beta|^2)^{n_2}}{n_1! n_2!} \quad (13)$$

$$\langle n_1(t) \rangle = \sum_{n_1 n_2} n_1 n_2 (n_1 - 1) \left[\frac{\cos [g\theta(t)\mu] - 1}{\mu^2} \right]^2 + n_1 n_2 \left[\frac{\sin [g\theta(t)\mu]}{\mu} \right]^2 + n_1 \left[1 + n_2 \frac{\cos [g\theta(t)\mu] - 1}{\mu^2} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1} (|\beta|^2)^{n_2}}{n_1! n_2!} \quad (14)$$

$$\langle n_2(t) \rangle = \sum_{n_1 n_2} n_1 n_2 (n_2 - 1) \left[\frac{\cos [g\theta(t)\mu] - 1}{\mu^2} \right]^2 + n_2 (n_2 - 1) \left[\frac{\sin [g\theta(t)\mu]}{\mu} \right]^2 + n_2 \left[1 + n_2 \frac{\cos [g\theta(t)\mu] - 1}{\mu^2} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1} (|\beta|^2)^{n_2}}{n_1! n_2!} \quad (15)$$

$$\mu^2 = n_1 + n_2 \quad (16)$$

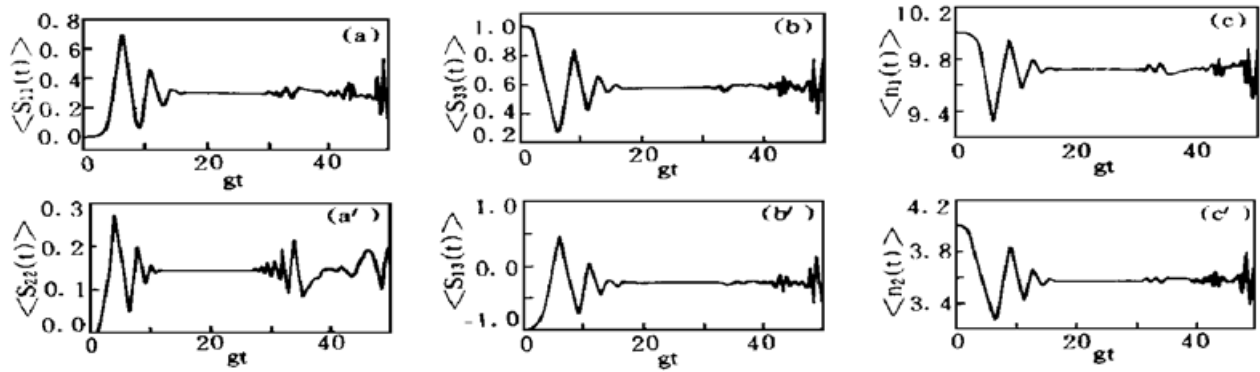
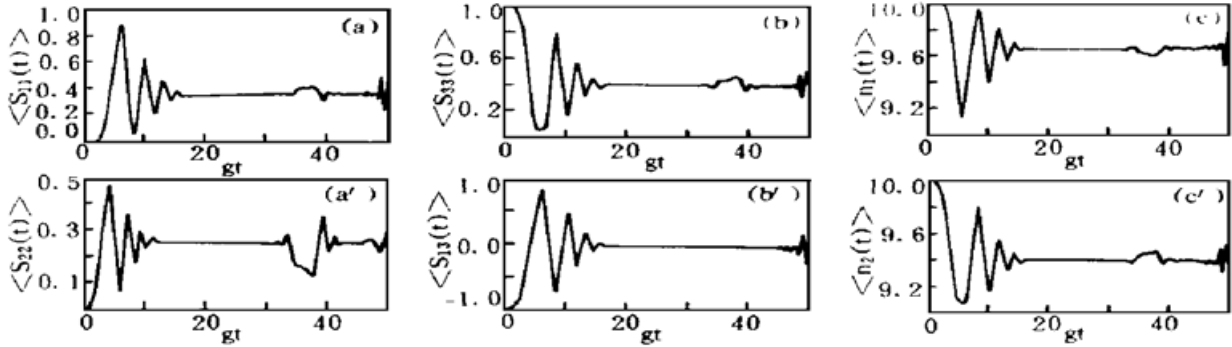
对于原子初始处于 $|a\rangle$ 态或 $|b\rangle$ 态的情形, 可用上述同样方法作类似计算, 这里暂不赘述。

3 讨 论

以上本文研究了耦合随时间变化的级联型三能级原子与初始处于相干态的双模辐射场的相互作用, (11)~(16)式可借助数值求和分析, 图2、图3给出了不同 \bar{n}_1 , \bar{n}_2 组合下原子能级算符及辐射场光子数平均值随时间变化的曲线。可见上述平均值随时间振荡, 并表现为周期性的衰减与恢复, 且振荡频率不断升高。

随着时间的增长, 辐射场的平均光子数 $n_1(t)$ 、 $n_2(t)$ 均小于初始值 \bar{n}_1 、 \bar{n}_2 , 这是因为原子最初处于最低能态 $|c\rangle$, $t > 0$ 后, 由于与辐射场的相互作用, 原子在一定程度上将处于较高的能态 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$, 辐射场的能量为原子的跃迁过程吸收, 这便导致了两个模的平均光子数小于初始值。

以 S_{13} 表示 $S_{11} - S_{33}$, 图2、图3中 $\langle S_{13}(t) \rangle - gt$ 图表明: 能级 $|a\rangle$ 与 $|c\rangle$ 之间存在粒子数反转, 亦即存在级联双光子过程——原子从 $|a\rangle$ 跃迁到 $|c\rangle$ 同时向模1、模2场各辐射一个光子, 或者, 原子从 $|c\rangle$ 向 $|a\rangle$ 跃迁, 同时从模1、模2各吸收一个光子。而且这种级联光子过程随拉比振荡周期性地出现。

Fig. 2 $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 1, gT = 50, k = 2.0$ Fig. 3 $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 10, gT = 50, k = 2.0$

本文的结论中取 $f = 1$ 即为级联型三能级原子 J-C 模型。可见, 引入与时间有关的耦合系数后, 拉比振荡仍将发生, 但振荡频率、崩溃与恢复期发生了明显的变化。

若初始时刻 ($t = 0$ 时) 只存在单模相干辐射场模 1 场, 则此时辐射场的密度算符为

$$\rho_F(0) = \sum_{m_1 m_2} \exp(-|a|^2) \frac{a^{m_1} (a^*)^{m_1}}{\sqrt{m_1! m_1!}} \sigma_{m_2 0} |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| \quad (17)$$

设原子仍起始于 $|c\rangle$ 态, 则有

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_F(0) \end{pmatrix} \quad (18)$$

采用前面同样方法并结合 (17), (18) 式可得

$$\left. \begin{aligned} \langle S_{11}(t) \rangle_c &= 0, & \langle S_{22}(t) \rangle_c &= 0, & \langle S_{33}(t) \rangle_c &= \sum_{n_1} \exp(-|a|^2) \frac{(|a|^2)^{n_1}}{n_1!} = 1, \\ \langle n_1(t) \rangle_c &= \bar{n}_1, & \langle n_2(t) \rangle_c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

显然, 原子始终停留在 $|c\rangle$ 能级, 辐射场模 1 与模 2 的平均光子数也始终保持各自初始值, 这是因为模 2 场初始时不存在, 原子无从吸收光子跳跃至中能态, 也就无法同模 1 场相耦合, 以致整个系统始终保持初始状态。

对于原子起始于 $|b\rangle$ 态的情况, 则有

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_F(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

利用上述同样方法可得

$$\langle S_{11}(t) \rangle_b = \sum_{n_1} n_1 \left[\frac{\sin [g\theta(t) \mu_b]}{\mu_b} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1}}{n_1!} \quad (21)$$

$$\langle S_{22}(t) \rangle_b = \sum_{n_1} \cos [g\theta(t) \mu_b] \exp(-|\alpha|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1}}{n_1!} \quad (22)$$

$$\langle S_{33}(t) \rangle_b = \sum_{n_1} \left[\frac{\sin [g\theta(t) \mu_b]}{\mu_b} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1}}{n_1!} \quad (23)$$

$$\langle n_1(t) \rangle_b = \sum_{n_1} \left[n_1(n_1 - 1) \left[\frac{\sin [g\theta(t) \mu_b]}{\mu_b} \right]^2 + n_1 \cos^2 [g\theta(t) \mu_b] \right. \\ \left. + n_1 \left[\frac{\sin [g\theta(t) \mu_b]}{\mu_b} \right]^2 \right] \exp(-|\alpha|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1}}{n_1!} \quad (24)$$

$$\langle n_2(t) \rangle_b = \sum_{n_1} \frac{\sin^2 [g\theta(t) \mu_b]}{\mu_b^2} \exp(-|\alpha|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1}}{n_1!} \quad (25)$$

此处 $\mu_b^2 = n_1 + (n_2 + 1) \delta_{n_2, 0} = n_1 + 1$ 。若原子在初始时刻处于 $|\alpha\rangle$ 态, 则有

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} \rho_F(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\langle S_{11}(t) \rangle_a = \sum_{n_1} \left[1 + (n_1 + 1) \frac{\cos [g\theta(t) \mu_a] - 1}{\mu_a^2} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1}}{n_1!} \quad (27)$$

$$\langle S_{22}(t) \rangle_a = \sum_{n_1} (n_1 + 1) \left[\frac{\sin [g\theta(t) \mu_a]}{\mu_a} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1}}{n_1!} \quad (28)$$

$$\langle S_{33}(t) \rangle_a = \sum_{n_1} (n_1 + 1) \left[\frac{\cos [g\theta(t) \mu_a] - 1}{\mu_a^2} \right]^2 \exp(-|\alpha|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1}}{n_1!} \quad (29)$$

$$\langle n_1(t) \rangle_a = \sum_{n_1} \left[n_1 \left[1 + (n_1 + 1) \frac{\cos [g\theta(t) \mu_a] - 1}{\mu_a^2} \right]^2 \right. \\ \left. + (n_1 + 1)^2 \left[\frac{\sin [g\theta(t) \mu_a]}{\mu_a} \right]^2 \right. \\ \left. + (n_1 + 1)^2 \left[\frac{\cos [g\theta(t) \mu_a] - 1}{\mu_a^2} \right]^2 \right] \exp(-|\alpha|^2) \frac{(|\alpha|^2)^{n_1}}{n_1!} \quad (30)$$

$$\langle n_2(t) \rangle_a = \langle S_{33}(t) \rangle_a \quad (31)$$

此处 $\mu_a^2 = n_1 + 1 + (n_2 + 1) \sigma_{n_2, 0} = n_1 + 2$ 。

可见, 尽管模 2 场在初始时刻不存在, 但拉比振荡频率仍然同原子与模 2 场的耦合有关, 因为原子初始时处于较高能级, $t > 0$ 后原子的自发跃迁导致了模 2 场的产生及其与原子的相互作用。

结束语 本文讨论了耦合系数与时间有关的级联型三能级原子与单模及双模辐射场的相互作用。研究表明: 两个辐射场之间的耦合是以与原子的相互作用为媒介的。原子的中间态 $|b\rangle$ 把分别与两个模相联系的两种跃迁耦合起来。辐射场与原子的相互作用除了与原子的能级结构、辐射场的初始状态有关外, 原子与辐射场相互作用的耦合系数起着不容忽视的重要作用。本文的研究结果可以用来处理双模、双光子激光、原子的单原子、双原子吸收等问题, 有关这些问题的进一步研究, 将另文报道。

参 考 文 献

- [1] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Comparison of Quantum and semiclassical radiation theories with application to beam maser. *Proc. IEEE.*, 1963, **51**(1): 89~ 109
- [2] S. Singh, Field statistics in some generalized Jaynes-Cummings models. *Phys. Rev. (A)*, 1982, **25**(6): 3206~ 3216
- [3] P. Alsing, M. S. Zubairy, Collapse and revivals in a two-photon absorption process. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1987, **4**(2): 177~ 184
R. R. Puri, R. K. Bullough, Quantum electrodynamics of an atom making two-photon transitions in an ideal cavity. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1988, **5**(10): 2021~ 2028
A. Joshi, R. R. Puri, Quantum electrodynamics of a Rydberg atom making two-photon transitions in the binomial state of the field in a lossless cavity. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(2): 215~ 224
- [4] 刘三秋, 刘正东等, 两个级联型三能级原子受激辐射的非线性性质. *物理学报*, 1991, **40**(7): 1049~ 1056
- [5] A. Joshi, R. R. Puri, Dynamical evolution of the two-photon Jaynes-Cummings Model in Kerr-like medium. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(7): 5056~ 5060
- [6] S. V. Lauande, Amitable Joshi, Stochastic fluctuations in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1994, **50**(2): 1692~ 1699
- [7] S. V. Lauande, A. Joshi, Q. V. Lawande, Generalized Jaynes-Cummings models with random telegraph noise. *Phys. Rev. (A)*, 1995, **52**(1): 619~ 629
- [8] A. Joshi, S. V. Lawande, Generalized Jaynes-Cummings models with a time dependent atom-field coupling. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **48**(3): 2276~ 2284
- [9] A. Joshi, Jaynes-Cummings model with stochastic fluctuations. *Phys. Lett. (A)*, 1994, **184**(6): 390~ 393
- [10] 李孝申, 量子统计的级联三能级 Jaynes-Cummings 模型. *物理学报*, 1985, **34**(6): 833~ 840
- [11] Songen Sun, The antibunching and the quantum beat of the interaction of a cascade three-level atom with two radiation fields. *J. Phys. (B)*, 1990, **23**(10): 2379~ 2390
- [12] X. S. Li, N. Y. Bei, A generalized three-level Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett. (A)*, 1984, **101**(3): 169~ 174

The Interaction of a Three-Level Atom with the Radiation Field with the Time-Dependent Atom-Field Coupling

Zhu Xiaoqin

(Department of Physics, Huaiyin Teachers College, Jiangsu Huaiyin 223001)

(Received 3 August 1996; revised 31 January 1997)

Abstract In the paper we have studied a Jaynes-Cummings Model (JCM) of interaction of a cascade three-level atom with two model radiation field which the coupling coefficient is time-dependent. By means of the method of density matrix, the properties of the average values of the atomic level operator, the average photon number of fields are discussed. More interesting results are analyzed.

Key words cascade three-level atom, time-dependent coupling coefficient.