

# 用二维时域有限差分法分析条形多层波导\*

赵安平 于荣金 刘立杰 王晓光

(中国科学院长春物理研究所, 长春 130021)

**摘 要** 为精确分析条形多层波导和多量子阱(MQW)波导, 本文提出了一种以二维时域有限差分(FDTD)法为基础的全波数值方法, 给出了场分布和色散特性的数值结果, 并与矢量有限元法已有的结果作了比较; 文中还研究了以二维时域有限差分法为基础的标量近似技术, 提出了它的有效性和精度的局限性。

**关键词** 条形多层波导, 二维时域有限差分法, 场分布。

## 1 引 言

近几年来, 由多层波导和多量子阱波导构成的集成光学器件, 因其优异的性能和各方面获得应用而受到人们的重视<sup>[1]</sup>。为了增进对多层波导结构基本性质和传播特性的了解, 已做过不少理论研究<sup>[2~16]</sup>。由于这类结构的复杂性, 分析多层波导和多量子阱波导(特别由很多层构成的波导区)时, 一般是很困难的。过去的理论工作, 主要集中在平面多层波导结构<sup>[2~13]</sup>。对于条形多层波导的分析, 只有两种略有不同的方法, 它们都是以有限元技术为基础的<sup>[14~16]</sup>。而在这两种方法中, 都应用了一个近似, 即把条形多层波导支持的混合  $E_{mn}^x$  模和  $E_{mn}^y$  模作为它们相应的标量  $TE_{mn}$  模和  $TM_{mn}$  模。应用这一近似是为了减少计算机的存储和中央处理机时间, 从而使有限元法适用于有很多层数的条形多层波导。

本文把二维时域有限差分法<sup>[17, 18]</sup>为基础的全波数值方法应用于精确分析条形多层和多量子阱波导。采用二维时域有限差分法而不是矢量有限元法<sup>[15]</sup>作为全波分析这样一类条形多层波导, 其原因是它更容易实现, 计算机存储量和中央处理机时间少。因而当应用于条形多层波导, 特别是多层系统的层数较多时, 二维时域有限差分法要比矢量有限元法更适宜。

## 2 数值方法

### 2.1 全波分析

在全波分析中, 需要考虑所有六个电磁场分量。假定多层波导支持的混合  $E_{mn}^x$  模或  $E_{mn}^y$  模, 沿波导传播轴  $Z$  的场变化为  $\exp(-j\beta Z)$ , 其中  $\beta$  为  $Z$  方向的传播常数,  $j = \sqrt{-1}$ , 则

\* 中国科学院长春物理研究所激发态物理开放实验室和集成光电子学国家重点联合实验室吉林大学实验区开放课题资助。

收稿日期: 1996 年 11 月 10 日; 收到修改稿日期: 1996 年 12 月 17 日

麦克斯韦旋度方程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} E_x &= \frac{\partial}{\partial y} H_z + j \beta H_y, & \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} E_y &= -j \beta H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z, \\ \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} E_z &= \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x, & \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_x &= -\frac{\partial}{\partial y} E_z - j \beta E_y, \\ \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y &= j \beta E_x + \frac{\partial}{\partial x} E_z, & \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_z &= -\frac{\partial}{\partial x} E_y + \frac{\partial}{\partial y} E_x. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别为真空中的介电常数和导磁率,  $\epsilon_r$  为介质的相对介电常数。

把波导截面分成若干二维单元[二维网格的单元如图 1(a)所示], 并应用二维时域有限差分法<sup>[17, 18]</sup>, 可把方程(1)变换成它的二维时域有限差分表示。例如, 借助空间和时间的中心差分近似, 方程(1)的第一式变为

$$\begin{aligned} E_x^{n+1/2}(i, j) &= E_x^n(i, j) + \frac{\delta t}{\epsilon_0 \epsilon_r(i, j) \delta y} \\ &\times [H_z^{n+1/2}(i, j+1) - H_z^{n+1/2}(i, j)] \\ &+ j \beta H_y^{n+1/2}(i, j) \end{aligned} \quad (2)$$

式中采用符号  $F^n(i, j) = F(i\delta x, j\delta y, n\delta t)$  近似代表场分量, 其中  $\delta x$  和  $\delta y$  分别为沿  $x$  方向和  $y$  方向的单元尺寸,  $\delta t$  为时间间隔。方程 1 的其余各式也可以相似的方式处理成相应的二维时域有限差分表示。为了保证二维时域有限差分方法的稳定性, 时间步长( $\delta t$ ) 的选取由下式决定<sup>[18]</sup>:

$$\delta t \leq \frac{1}{V_{\max}} \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \right] \quad (3)$$

式中  $V_{\max}$  为波预期的最大相速度,  $\Delta x$  和  $\Delta y$  是网格模型中一个单元的最小值。这个稳定性条件也可用于下面的标量近似方法。

### 2.2 标量近似分析

在标量近似方法中, 用  $TE_{mn}$  模 ( $E_y \equiv 0$ , 主函数为  $E_x$ ) 和  $TM_{mn}$  模 ( $H_y \equiv 0$ , 主函数为  $H_x$ ) 分别近似混合  $E_{mn}^x$  模和  $E_{mn}^y$  模。利用上述假定, 对例如  $TE_{mn}$  模可从麦克斯韦方程推出如下波动方程<sup>[15, 16]</sup>:

$$\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \beta^2 \phi, \quad (\text{这里 } \phi = E_x) \quad (4)$$

对于这些  $TE_{mn}$  模, 如果利用图 1(b) 所示的二维网格单元, 则(4)式可变成如下二维时域有限差分表示:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1}(i, j) &= (2 - \beta^2) \phi^n(i, j) - \phi^{n-1}(i, j) \\ &+ \frac{(\delta t)^2}{\epsilon_0 \epsilon_r(i, j) \mu_0 (\delta x)^2} [\phi^n(i+1, j) - 2\phi^n(i, j) + \phi^n(i-1, j)] \\ &+ \frac{(\delta t)^2}{\epsilon_0 \epsilon_r(i, j) \mu_0 (\delta y)^2} [\phi^n(i, j+1) - 2\phi^n(i, j) + \phi^n(i, j-1)] \end{aligned} \quad (5)$$

相似地, 可推导  $TM_{mn}$  模的方程。

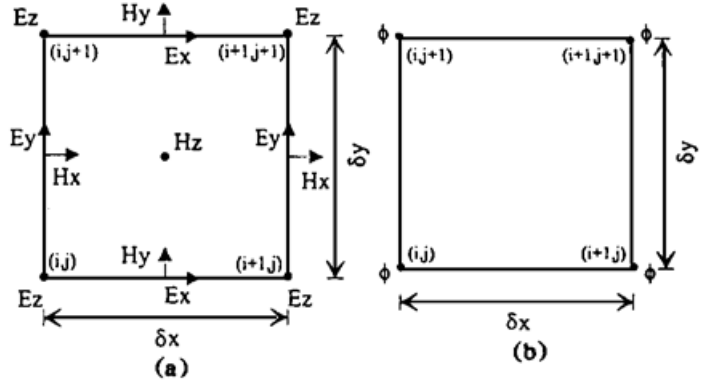


Fig. 1 The unit cell used in the 2-D FDTD methods (a) for the full-wave analysis; (b) for the scalar approximation analysis

### 2.3 吸收边界条件

因用于实现有限差分方程的计算机能力有限, 网格在  $x$  方向和  $y$  方向必须限制。这可通过把吸收边界条件应用于网格边界来实现。按照文献[19], 对于区域  $x \geq 0$ , 在外部区(0)和网格区(1)由电场切向分量表示吸收边界条件的时域有限差分公式可推导成下列有限差分的显式:

$$E_0^{n+1} = E_1^n + \frac{V_{px}\delta t - \delta x}{V_{px}\delta t + \delta x} (E_1^{n+1} - E_0^n) \tag{6}$$

$$\Phi_0^{n+1} = -\Phi_1^{n+1} + \frac{V_{px}\delta t - \delta x}{V_{px}\delta t + \delta x} (\Phi_1^{n+1} + \Phi_0^{n+1}) + \frac{2\delta x}{V_{px}\delta t + \delta x} (\Phi_0^n + \Phi_1^n) \tag{7}$$

式中  $V_{px}$  为  $x$  方向的相速度, (6) 式和(7) 式分别为全波分析和标量近似分析的吸收边界条件。从(6) 式和(7) 式可以看出, 对于全波和标量近似的二维时域有限差分法, 吸收边界条件的表示式是不同的。这是因为从(2) 式和(5) 式可以看出, 在全波分析中, 场分量是用二时间步长达到要求的; 而在标量近似分析中, 场分量是用三时间步长达到要求的。 $y$  方向的表示式可以类似地推得。

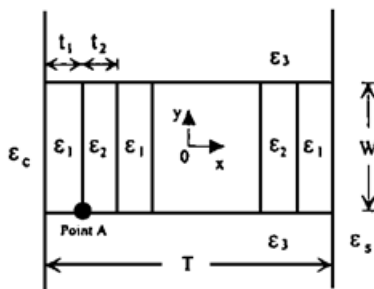
### 2.4 二维时域有限差分法的计算程序

为了用二维时域有限差分法分析波导系统, 对全波分析和标量近似方法, 计算中都涉及下列二步<sup>[17, 18]</sup>: 1) 必须首先从波导系统截面上, 场的某一初始值选出传播常数  $\beta$  的期望值。在发射激励脉冲后, 等待脉冲分布稳定, 并作傅里叶变换, 记录场分量在选取某一点随时间的变化, 就得到由陡峰组成的傅里叶频谱, 然后得到与选取的传播常数有关的模态频率(相当于各个峰); 2) 从上面程序得到的模态频率后, 用网格每个点处得到的模态频率作傅里叶变换, 就得到电场分量和磁场分量。

从上述可以看出, 二维时域有限差分法解本征值问题的方法与有限元法是不同的。在二维时域有限差分法中, 本征值(或本征矢)由傅里叶变换得到, 而在有限元法中, 则往往由解矩阵方程得到。与傅里叶变换相比, 解矩阵方程需要大量计算机存储和中央处理机时间。当由较多层构成多层波导时, 这是二维时域有限差分法比矢量有限元法更适合的主要理由之一。

## 3 数值计算

研究如图 2 所示的由若干层组成的一种典型对称多层条波导。芯区的宽度和厚度分别用



$W$  和  $T$  表示, 每个阱的相对介电常数和厚度用  $\epsilon_1$  和  $t_1$  表示, 而每个垒的相对介电常数和厚度由  $\epsilon_2$  和  $t_2$  表示, 传导(或芯)区由包层( $\epsilon_c$ )、覆盖层( $\epsilon_c$ )和衬底( $\epsilon_s$ )所包围。虽然这个多层波导系统支持许多模式<sup>[15]</sup>, 本文集中研究基模。对于基模  $E_{11}(E_{11})$  或  $TE_{11}(TM_{11})$ , 激发具有高斯脉冲(时间上)传送的高斯分布(空间上)的波导, 而不是激发具有严格模态场分布的波导:

$$f^n(x, y, n\delta t) = G(x, y) G^n(n\delta t) \tag{8}$$

Fig. 2 Cross-section geometry of a channel multilayer waveguide

式中  $G(x, y) = \exp[-(2x/W_x)^2] \exp[-(2y/W_y)^2]$

$$G^n(n\delta t) = \exp[-(\frac{n\delta t - t_0}{T_1})^2] \tag{9}$$

其中  $W_x (= T/2)$  和  $W_y (= W/2)$  分别为芯区的半厚度和半宽度,  $t_0$  和  $T_1$  为高斯脉冲的时延

和宽度。对于不同类型的模式，在波导激励中应该用不同的场分量。例如， $E_{11}^h$ 模应该用  $f^n(x, y, n\delta t) = E_x^n(x, y, n\delta t)$ ， $E_{11}^v$ 模应该用  $f^n(x, y, n\delta t) = E_y^n(x, y, n\delta t)$ ；此外，为避免非理想吸收边界反射的反射波在源激励全部发射以前干扰激励波，可应用改进的源激励方案<sup>[20]</sup>（即在(2)式或(5)式中加进激励  $f^n(x, y, n\delta t)$  作为附加项）。在全波分析和标量近似法中，计算时用了下列结构参数<sup>[15, 16]</sup>： $\epsilon_1 = 12.25$ ， $\epsilon_2 = 10.24$ ， $\epsilon_3 = 9.9225$ ， $\epsilon_c = \epsilon_s = 10.89$ ， $W = 1.0 \mu\text{m}$ ， $T = 2.0 \mu\text{m}$ ，以及  $t_1 = t_2$ 。对于两种不同介质界面的电场分量，采用两种介电常数的平均值<sup>[17]</sup>；而在某些特殊点，例如三种不同介质的结合点（即图 2 中的 A 点），采用介电常数的平均值： $\bar{\epsilon}_1 = 0.5\epsilon_3 + 0.25(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ 。在包含整个芯区的范围内，都使用均匀网格（每个阱和垒内四个单元）；而为了改善这些方法的计算效率，在芯区之外采用等级网格。

图 3 表示混合模和标量基模的有效折射率（ $= \beta/k_0$ ，其中  $k_0$  为真空中的波数）与多层波导层数  $N = N_w + N_b$ （ $N_w$  和  $N_b$  分别为阱和垒的层数， $N_w = (n + 1)/2$ ， $N_b = (N - 1)/2$ ）的关系。为检验本文提出的全波二维时域有限差分法的有效性和精度，图 3 也画出了矢量有限元法仅有的结果（即  $N = 11$  时  $E_{11}^h$  模的结果）<sup>[15]</sup>。从图 3 可以看出，对于这种情况，由全波二维时域有限差分法得到的有效折射率与矢量有限元法所得的结果非常一致。

为了演示多层系统的基本行为以及检验标量近似技术的有效性和精度，在图 4(a) ~ 4(f) 中画出了  $N = 11$  时  $E_{11}^h$  模的场分量表面图或等值线图；图 5 画出了  $N = 11$  时  $TE_{11}$  模的表面图。为使场分布清晰可见，只在整个芯区这样一个较小空间域内作了场

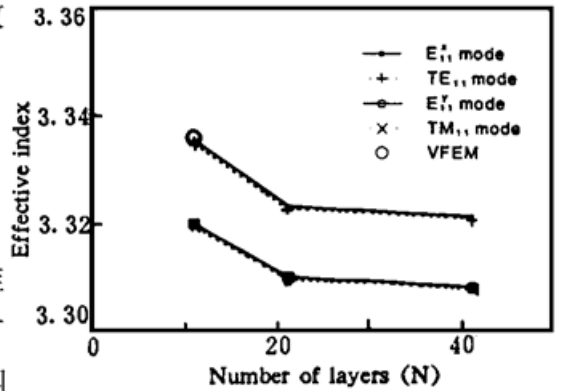


Fig. 3 Effective index versus  $N$  obtained with the full-wave and scalar approximation methods

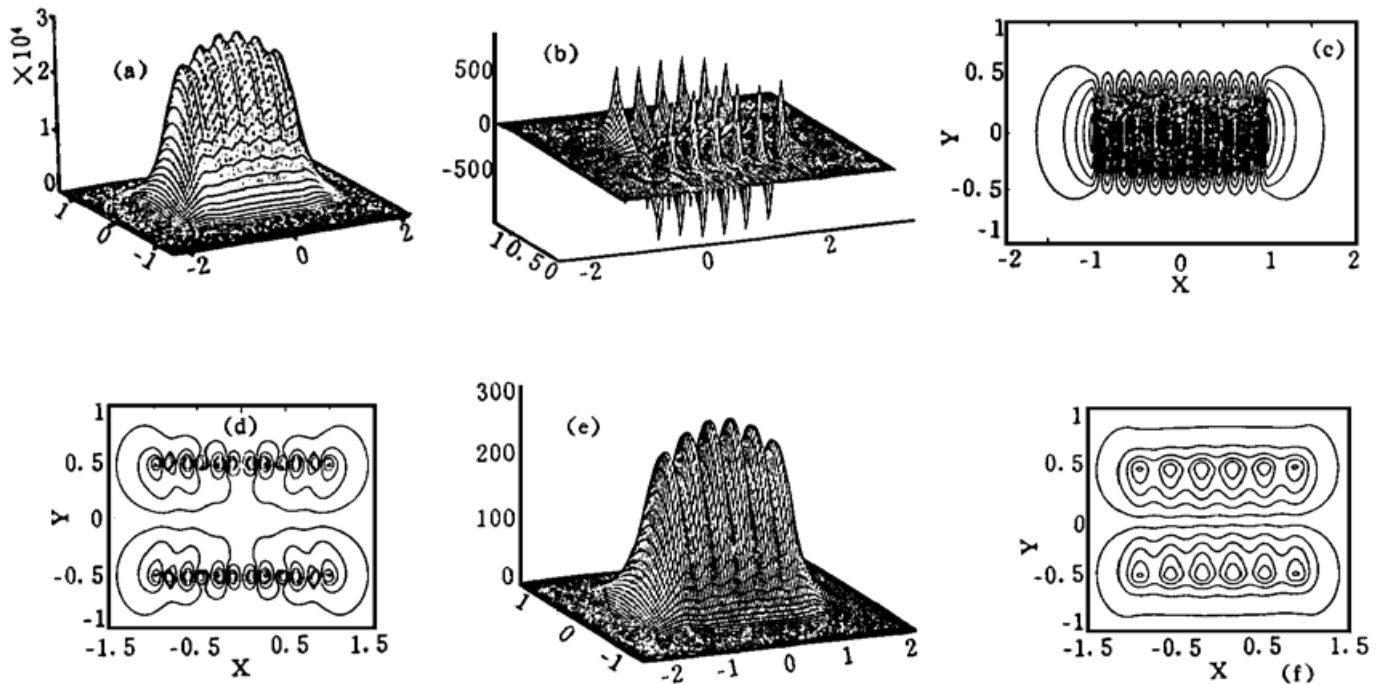


Fig. 4 Field distributions of the hybrid  $E_{11}^h$  mode for the case  $N = 11$

- (a)  $E_x$  surface plot; (b)  $E_y$  surface plot; (c)  $E_z$  contour plot; (d)  $H_x$  contour plot; (e)  $H_y$  surface plot; and (f)  $H_z$  contour plot

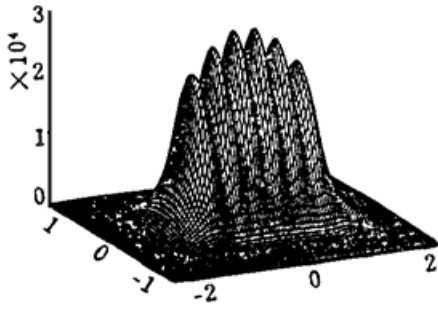


Fig. 5 Surface plot ( $\phi$ ) of the scalar  $TE_{11}$  mode for the Case  $N = 11$

分布图。为进一步证实全波二维时域有限差分法的有效性和精度,  $E_{11}^h$  模的  $E_x$  和  $H_x$  场分量的等值线图[即本文的图4(c)和4(f)]与矢量有限元法所得的结果[即文献[15]中的图14和图13]作了比较, 两种结果一致性很好。

然而比较图4(a)和图5的场分布, 并注意它们间的差异, 可以发现: 标量近似技术所得的结果精度较差。这是因为对于多层系统支持的混合  $E_{11}^h$  模,  $E_y$  场分量的这些峰(这些峰的数目总计  $4N_w$  个)几乎均匀地分布在阱和垒上,  $E_y$  场分量的值可以与  $E_x$  场分量的值相比, 例如从图4(a)和4(b)可以看出:  $E_x/E_y$  之比约为30。由于这个原因,  $E_{11}^h$  模的  $E_y$  场分量不能简单地加以忽略, 因而不能应用标量

近似方法。这对任意大层数的条形多层系统也是适用的。

图6(a)和6(b)分别画出了  $N = 21$ (即  $N_w = 11, N_b = 10$ ) 和  $N = 41$ (即  $N_w = 21, N_b = 20$ ) 时  $E_{11}^h$  模  $E_x$  场分量的表面图; 而图7(a)和7(b)画出了  $N = 21$  和  $N = 41$  时  $TE_{11}$  模的表面图。从图6(a)和6(b)可以看出: 在垒内,  $E_{11}^h$  模  $E_x$  场分量的分布随着层数的增加而下降。这种现象为条形多量子阱波导的量子效应, 尤其在层数增加时, 这种量子效应增强。而用标量近似方法不能预期这一重要效应, 这可从图7(a)和7(b)看出。为了更好地说明全波法与标量近似法之间结果的差异, 图8(a)和8(b)分别画出  $N = 41$  时  $E_{11}^h$  模和  $TE_{11}$  模的等值线图。根据文献[16], 图8(b)的结果就是用等效方法(即用单一均匀材料替代多量子阱材料)得到的结果。比较图8(a)和8(b), 容易看出等效方法的不精确性或毛病。这意味着标量近似技术和等效方法都不能给出条形多层波导的精确场分布。上述比较和证实程序对条形多层波导和多量子阱波导的  $E_{11}^h$  导模也已做过, 并对  $E_{11}^h$  模有相同的结论。

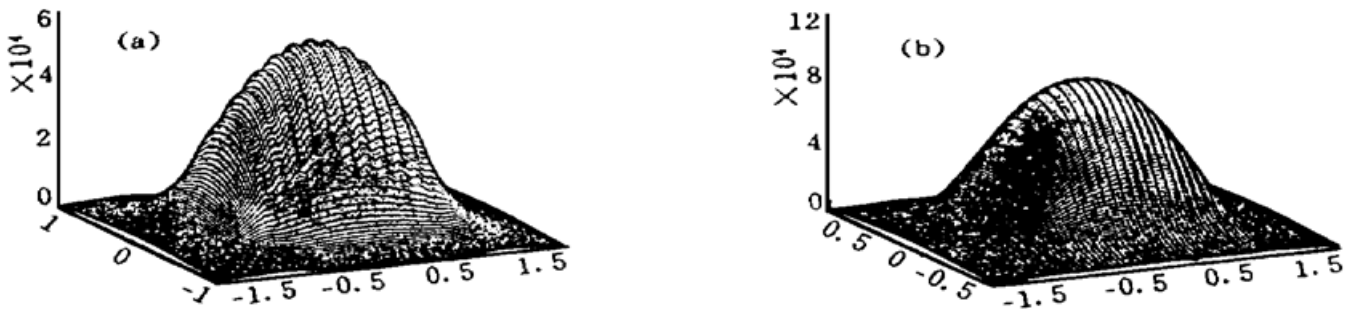


Fig. 6 Surface plot ( $E_x$ ) of the hybrid  $E_{11}^h$  mode

(a)  $N = 21$ ; (b)  $N = 41$

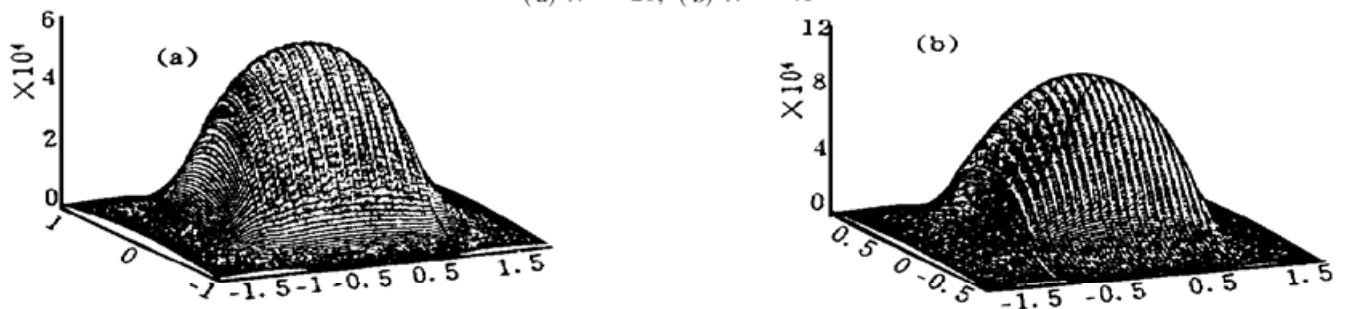


Fig. 7 Surface plot ( $\phi$ ) of the scalar  $TE_{11}$  mode

(a)  $N = 21$ ; (b)  $N = 41$

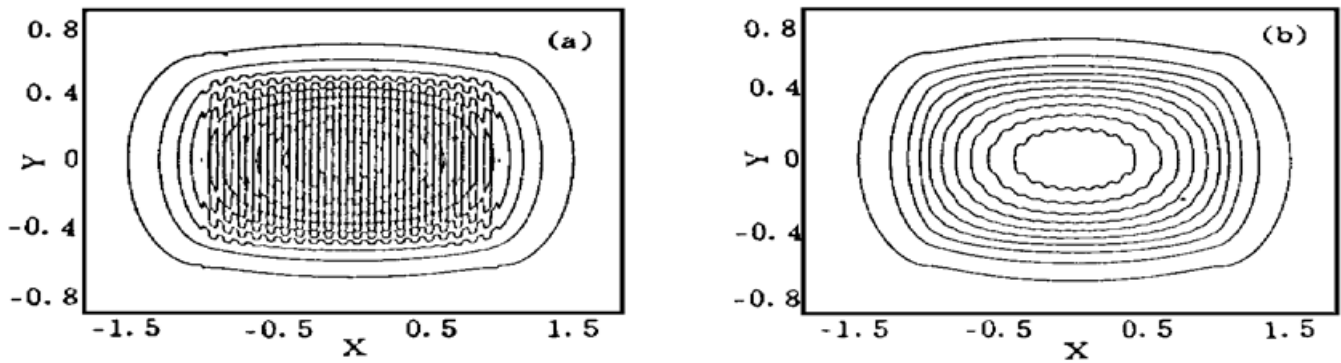


Fig. 8 Contour plots for the case  $N = 41$

(a) contour plot ( $E_x$ ) of the hybrid  $E_{H1}$  mode; (b) contour plot ( $\phi$ ) of the scalar  $TE_{H1}$  mode

最后必须强调: 虽然标量近似方法不适用于条形多层系统的精确分析, 但是对一般的条形三层波导还是适用的, 这是因为三层波导结构传导的  $E_{H1}$  模的  $E_x/E_y$  之比通常大于 150, 并且最重要的是它不像多层系统, 它的  $E_y$  场分量只有 4 个峰, 它们主要集中在芯区。因此, 对三层波导的  $E_{H1}$  模,  $E_y$  场分量与  $E_x$  场分量相比是可以忽略不计的。如在文献[21, 22]中已表明的那样, 对三层波导用标量近似技术可得到非常精确和合理的结果(包括有效折射率和场分布)。

**结 论** 本文对精确分析条形多层波导和多量子阱波导, 提出了一种以二维时域有限差分法为基础的全波数值方法。对条形波导系统, 给出了不同层数时色散特性和场分布的数值结果, 并与矢量有限元法已有的结果作了比较; 还研究了标量近似方法的有效性和精度。通过全波分析和标量近似法所得数值结果的比较, 发现由于这类结构的复杂性, 用标量近似法所得结果精度较差, 更重要的是标量近似技术不能预期量子效应。因此可以得出如下结论: 1) 为了精确研究条形多层和(或)多量子阱波导, 必需应用全波分析法; 2) 本文提出的全波二维时域有限差分法, 对于条形多层波导和(或)多量子阱波导构成的集成光路计算机辅助设计(CAD), 也许是一种有效的、通用的电磁模拟工具。

### 参 考 文 献

- [1] 于荣金, 集成光学与光子学(大会特邀报告), 第一届全国光子学学术会议, 深圳, 1996, IR06
- [2] S. Ohke, T. Umeda, Y. Cho, Optical waveguides using GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As multiple quantum well. *Opt. Commun.*, 1985, **56**(4) :235~ 239
- [3] T. Miyoshi, H. Goto, H. Kimura, Transmission characteristics of optical waveguides with multi-quantum-well structures. *Electron. Lett.*, 1986, **22**(18) :953~ 954
- [4] Y. F. Li, J. W. Y. Lit, General formulas for the guiding properties of a multilayer slab waveguide. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1987, **4**(4) :671~ 677
- [5] S. Ohke, T. Umeda, Y. Cho, TM-mode propagation and form birefringence in a GaAs-AlGaAs multiple quantum well optical waveguide. *Opt. Commun.*, 1989, **70**(2) :92~ 96
- [6] J. Kraus, P. P. Deimel, Calculation of the propagation constant of optical modes in multi-quantum-well structures. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1990, **QE-26**(5) :824~ 826
- [7] A. P. Zhao, S. R. Cvetkovic, Finite element analysis of semiconductor laser arrays. *Microwave and Optical Technol. Lett.*, 1991, **4**(7) :247~ 250
- [8] R. Smith, L. Molter, M. Dutta, Evaluation of refractive index approximations used for mode determination in multiple quantum well slab waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1991, **QE-27**(5) :1119~ 1122
- [9] A. P. Zhao, S. R. Cvetkovic, Numerical modeling of nonlinear TE waves in multiple quantum-well



- waveguides. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 1992, **4**(6) ·623~ 626
- [10] G. M. Alman, L. A. Molter, H. Shen *et al.*, Refractive index approximations from linear perturbation theory for planar MQW waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1992, **QE-28**(3) ·650~ 657
- [11] S. R. Cvetkovic, A. P. Zhao, Finite element formalism for linear and nonlinear guided waves in multiple-quantum-well waveguides. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1993, **10**(8) ·1401~ 1407
- [12] C. Ma, Coupling properties in periodic waveguides and in multiple quantum-well waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1994, **QE-30**(12) ·2811~ 2816
- [13] M. Saini, E. Sharma, Analysis of nonlinear MQW waveguides: A simple numerical approach. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 1996, **8**(3) ·384~ 386
- [14] 赵安平, 于荣金, 用有效折射率法和有限元法分析多量子阱条形光波导. *光学学报*, 1991, **11**(8) ·720~ 726
- [15] A. P. Zhao, S. R. Cvetkovic, M. Punjani, Analysis of stripe multilayer waveguides with effective index and finite element methods. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1992, **QE-28**(3) ·573~ 579
- [16] N. Osman, M. Koshiba, R. Kaji, A comprehensive analysis of multilayer channel waveguides. *J. Light Wave Technol.*, 1994, **12**(5) ·821~ 826
- [17] A. Asi, L. Shafai, Dispersion analysis of anisotropic inhomogeneous waveguides using compact 2D-FDTD. *Electron. Lett.*, 1992, **28**(15) ·1451~ 1452
- [18] A. C. Cangellaris, Numerical stability and numerical dispersion of a compact 2-D/FDTD method used for the dispersion analysis of waveguides. *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, 1993, **3**(1) ·3~ 5
- [19] G. Mur, Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, 1981, **23**(4) ·377~ 382
- [20] A. P. Zhao, A. V. Raisanen, S. R. Cvetkovic, A fast and efficient FDTD algorithm for the analysis of planar microstrip discontinuities by using a simple source excitation scheme. *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, 1995, **5**(10) ·341~ 343
- [21] M. Koshiba, K. Hayata, M. Suzuki, Approximate scalar finite-element analysis of anisotropic optical waveguides. *Electron. Lett.*, 1982, **18**(10) ·411~ 413
- [22] 赵安平, 于荣金, 改进的光波导标量近似有限元分析. *光学学报*, 1989, **9**(2) ·175~ 180

## Analysis of Channel Multilayer Waveguides with the Two-Dimensional Finite Difference Time Domain Method

Zhao Anping    Yu Rongjin    Liu Lijie    Wang Xiaoguang

(*Changchun Institute of Physics, The Chinese Academy of Sciences, Changchun 130021*)

(Received 10 November 1996; revised 17 December 1996)

**Abstract** A full-wave numerical approach, based on the two-dimensional finite difference time domain (FDTD) method, is developed for the accurate analysis of channel multilayer and multiple quantum well (MQW) waveguides. Numerical results in terms of field distributions and dispersion characteristics are given and compared with available results obtained with vector finite element method. The scalar approximation technique, based on the 2-D FDTD method, is also investigated and its limitations of the validity and accuracy are pointed out.

**Key words** channel multilayer waveguide, 2-D FDTD method, field distribution.