

负二进制编码小波变换*

闫晓娜 王 宁 殷耀祖 王 锋 刘立人

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 提出一种新的数学编码方法来计算小波变换, 并利用非相干光学相关器进行实验, 结果与理论分析相符。这种算法原理简单, 操作方便, 且精度可望达到极高。

关键词 小波变换, 负二进制编码, 非相干光学相关器。

1 引 言

小波变换(WT)与傅里叶, 拉普拉斯, 希尔伯特变换相似, 也是一种线性, 平方可积函数的变换。但它又与上述变换不同, 即小波变换的基核不是唯一固定的, 而是由满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 0$ 的小波母函数 $h(t)$ 经过尺度和平移变换而形成的一系列小波函数组成的。

通常, 一维小波函数定义为 $h_{ab}(t) = (1/\sqrt{a}) h[(t-b)/a]$ 。其中, a 是尺度变量, b 是平移变量, \sqrt{a} 是归一化因子。

设一维信号 $s(t) \in L^2(R)$, 定义小波变换为:

$$\begin{aligned} Ws(a, b) &= \langle s(t), h_{ab}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) h\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= (1/\sqrt{a}) s(b) * h(-b/a) = (1/\sqrt{a}) s(b) \odot h(b/a) \end{aligned} \quad (1)$$

由上式可见, 一维信号输入将产生二维输出, 而二维信号输入将产生四维输出, 因此即使是“快速”小波变换, 其数字化算法也将是极慢的^[1]。近年来由于光学理论日趋完善, 人们转而求助于光学的并行, 高速和无串扰特性来实现小波变换。最近有人提出把小波函数的傅里叶变换作为空间匹配滤波器阵列^[2], 利用相干光学中透镜的傅里叶, 反傅里叶变换的特性来实现小波变换。这种方法原理简单, 运算速度快。但由于相干光学的模拟运算受外界干扰影响大而限制其在高精度运算中的应用, 人们渴望寻求一种快速且高精度的运算方法。

本文提出一种负二进制编码算法来执行小波变换。这种算法由于采用数字编码使精度明显提高, 而相应的非相干光学系统的并行性又使运算速度大大加快, 这些特点使它明显优于上述两种方法。为阐述负二进制编码小波变换, 必须先熟悉一下负二进制系统。

* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1996 年 4 月 25 日; 收到修改稿日期: 1996 年 8 月 23 日

2 负二进制编码

负二进制系统是以(-2)为底数,任一正或负的实数 a 都有唯一的表达式^[3, 4]

$$a = \sum_{i=-M}^{N-1} (-2)^i a_i, \quad a_i \in \{0, 1\} \quad (2)$$

其中 a_i 是第 i 位数值。在负二进制系统中,两个实数相加可以通过把相应位相加,结果将得到混合负二进制数形式;为了简化两个实数相减运算,可以通过加权-移位操作把负号数变为正号数再进行计算;在数字化乘法中,乘积中的每一位都是乘数与被乘数卷积的结果。基于以上考虑,在复数矩阵-矢量乘法运算中,第 i 行矢量的第 n 个数的实部和虚部分别为

$$\begin{aligned} C_n^R(i) &= \sum_j a^R(i, j) b_n^R(j) + \frac{1}{2} a^I(i, j) b_{n+1}^I(j) \\ C_n^I(i) &= \sum_j a^R(i, j) b_n^I(j) + a^I(i, j) b_n^R(j) \end{aligned} \quad (3)$$

其中,上标 R 代表实部、 I 为虚部。

由于上述算法采用加权-移位操作完成两数相减,因此,一切正负数的加减运算可以一步完成,无符号位,无进位,也无需再编码。

3 负二进制编码实现小波变换的算法

为了执行非相干光学系统,作者选择离散小波变换。在离散空间,小波函数形式为^[5]

$$h_{mn}(t) = a_0^{m/2} h(a_0^m t - nb_0)$$

相应的离散小波变换为

$$\begin{aligned} C_f(m, n) &= a_0^{m/2} S(na_0^{-m} b_0) * h(-nb_0) \\ &= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} a_0^{m/2} s(qa_0^{-m} b_0) \cdot h[(q-n)b_0] \end{aligned}$$

其中: m, n, q 为整数,对于确定的小波函数, a_0, b_0 为常数值。

对于确定的 m_0 值: $a_0^{m_0/2} S(qa_0^{-m_0} b_0)$ 是变量 q 的函数,当 q 从负无穷到正无穷变化时, $a_0^{m_0/2} S(qa_0^{-m_0} b_0)$ 可以用一矢量来表示; $h[(q-n)b_0]$ 则是 q, n 的二维函数,随 q, n 的变化 $h[(q-n)b_0]$ 将表示为一矩阵。根据(3)式的结论可知,计算 $C_f(m_0, n)$ 也就是计算矩阵-矢量的乘积。刘^[3]的文章曾证明矩阵-矢量的十进制数乘积运算可通过数字化运算来实现。因此,小波变换的计算归结为数字化的矩阵-矢量乘法运算。利用(2)式很容易得到关于变量 n 的一系列函数值 $C_f(m_0, n)$ 。若再改变 m ,得到的就是关于变量 m, n 的 $C_f(m, n)$,即离散小波变换。

4 光学实现

实验装置如图1所示。A、B平面分别是矩阵、矢量的模板,平面A靠近透镜1,平面B

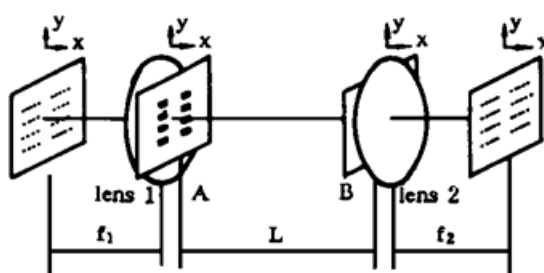


Fig. 1 Optical incoherent correlator

靠近透镜2。透镜1前焦面的光源阵列中的每个类点光源发出的光通过平面A、B后,像平面的输出光强就是光学相关器运算的结果。其中四个平面平行放置且光源阵列与输出阵列的所有像素间距及大小完全一致。

编码方式:矩阵元素的实部放在左边,虚部放在右边。每个数值由三位负二进制数字水平表示,透光部分为1,不透光为0。矢量元素以相同方式空间编码,

但还有一附加编码板用来表示虚部的半值, 三者水平放置。

实验中, 设小波母函数为 Harr 小波

$$h(t) = \text{rect} [2(t - 1/4)] - \text{rect} [2(t - 3/4)]$$

输入信号为 $U(t)$ 函数。可以证明, 在离散空间, Harr 小波函数有如下形式^[5]

$$h_{m, n}(t) = 2^{m/2} h(2^m t - n)$$

则离散小波变换为

$$C_f(m, n) = 2^{m/2} S(n2^{-m}) * h(-n) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} 2^{m/2} s(q2^{-m}) \cdot h(q-n) \quad (m, n, q \text{ 为整数}) \tag{4}$$

当 $m = 2$ 时: 根据(4) 式计算 $n = -2, -1, 0, 1$ 时 $C_f(2, n)$ 的值为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n = -2 \\ n = -1 \\ n = 0 \\ n = 1 \end{matrix} \tag{5}$$

为进行实验, 利用(2) 式重写方程(5) 的左边为负二进制编码形式, 然后根据(3) 式求得数字化矩阵- 矢量乘积的结果为混合负二进制编码形式, 如下列等式的右边表示

$$\begin{bmatrix} 001 & 011 & 000 & 000 & 000 \\ 000 & 001 & 011 & 000 & 000 \\ 000 & 000 & 001 & 011 & 000 \\ 000 & 000 & 000 & 001 & 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 000 \\ 000 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 00000 \\ 01210 \\ 01320 \\ 01320 \end{bmatrix}$$

图 2(a), (b) 分别是 $m = 2$ 时矩阵元素和矢量元素的编码板 A, B; 图 3 是可能的输出分布; 理论输出如图 4(a); 图 5(a) 是 $m = 2$ 时的实验结果照片, 实验所用透镜的焦距为 $f_1 = 13.5$ cm, $f_2 = 24.0$ cm, $L = 13.5$ cm, 模板的小孔直径为 1 mm, 间距为 2 mm。

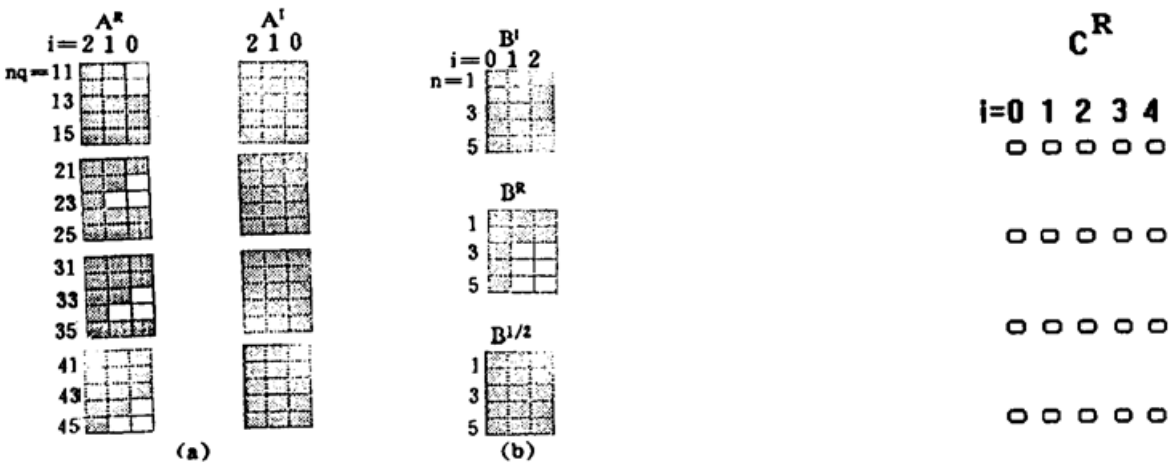


Fig. 2 Coded masks of the matrix (a) and the vector (b)

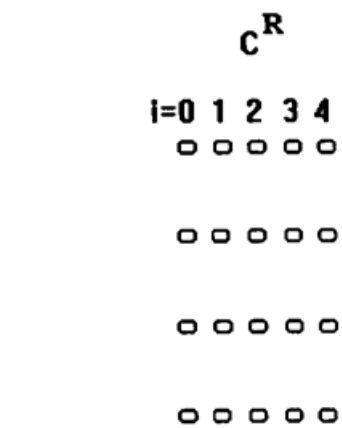


Fig. 3 The possible output distribution

$h(q - n)$ 与变量 m 无关[(4) 式], 改变 m 值并不改变矩阵编码板 A。因此, 只需改变 B 板的编码, 即可得到不同 (m, n) 点的离散小波变换值。如, 令 $m = 4$, 此时的输入矢量为 $(0, 0, 4, 4, 0)^T$ (T 代表转置), 相应的理论输出为 $(0, -4, 0, 4)^T$, 依(3) 式表示成混合负二进制编

0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 1 2 1 0	0 0 1 1 0
0 2 3 1 0	0 0 2 1 0
0 2 3 1 0	0 0 1 0 0

Fig. 4 The theoretical output distribution
of (a) $m = 2$, (b) $m = 4$

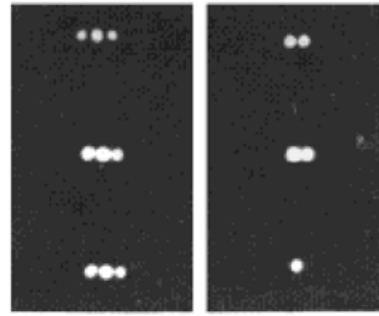


Fig. 5 Photographs of the output of the setup
shown in Fig. 1. (a) $m = 2$, (b) $m = 4$

码为(0000, 1100, 1200, 0100)^T, 理论输出结果如图 4(b), 实验结果示于图 5(b)。可见, 理论和实验是相符的, 这表明完全可以用负二进制编码计算小波变换。若把不同 m 处测得的不同 n 值集结成一个关于变量 m, n 的表, 就可以很方便地了解信号在不同分辨率处的特性。

结 论 本文阐述了用混合负二进制编码的矩阵-矢量乘法来实现小波变换。这种算法具有快速, 高精度的特点。而且由于对特定的小波函数, 矩阵编码板是固定的, 因此操作方便, 编码板制作容易。但由于不同的 (m, n) 处的小波变换值无法在一次实验中同时测定, 故这种方法尚需改进。值得注意的是, 该算法体系的输出被表示成混合负二进制形式, 与输入相似。因此, 原理上它可以作为下一级小波逆变换处理器的输入, 还原原函数。该算法所需的预处理仅是十进制转换为负二进制, 后处理是对混合负二进制结果加权求和成为十进制, 这可以由电子线路完成。随着大规模集成电子技术的发展, 可研制集成光电子复数乘法器模块, 实现对图像的处理。

参 考 文 献

- [1] H. Szu, H. J. Caulfield, Wavelet transforms. *Opt. Engng.*, 1991, **31**(9) : 1823~ 1824
- [2] Y. Shen, D. Roberge, H. Szu, Optical wavelete transform. *Opt. Engng.*, 1991, **31**(9) : 1840~ 1845
- [3] L. Liu, G. Li, Y. Yin, Optical complex matrix-vector multiplication with negative binary inner products. *Opt. Lett.*, 1994, **19**(21) : 1759~ 1761
- [4] 李国强, 刘立人, 邵 岚, 负二进制编码的光学阵列化复数运算. *光学学报*, 1995, **15**(10) : 1409~ 1412
- [5] 李世雄, 刘家琦, 小波变换和反演数学基础. 北京, 地质出版社, 1994

Negative Binary Coding Wavelet Transform

Yan Xiaona Wang Ning Yin Yaozu Wang Feng Liu Liren

(Shanghai Institute of Optics & Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 25 April 1996; revised 23 August 1996)

Abstract Wavelet transforms are very effective for analyzing the information content of signal. In this paper, we propose a novel digital matrix-vector multiplication and the incoherent optical correlator to compute discrete wavelet transforms. The application of this representation to signal processing is discussed.

Key words wavelet transform, negative binary coding, incoherent optical correlator.