

良导体阶梯反射光栅的衍射问题分析

石建川 李 慎 刘盛纲

(电子科技大学技术大学高能电子学研究所, 成都 610054)

摘 要 对一种特殊良导体阶梯光栅在 TE 波入射情况下的衍射效率问题, 用电磁场导波理论进行分析和研究, 采用模式匹配方法, 对用电磁场导波理论分析所获得的方程进行解算, 对计算结果作进一步的优化分析研究, 这些分析和研究结果对实际工程设计具有十分重要的指导意义。

关键词 计算机光学, 阶梯光栅, 衍射效率, 模式匹配, 优化方法。

在光栅理论中, 当光栅周期 T 与入射光波长相近时, 用标量理论来分析问题将产生很大误差^[1]。光栅的刻蚀深度 h 与入射光波长相近时出现这些情况。现在很多光学系统, 如光盘, 其表面上槽的密度是极高的, 因而用光学标量理论来分析处理问题, 必定带来许多误差。用标量理论来解决分析光栅的衍射问题有不少的论述。本文对一种特殊光栅的衍射效率用电磁场理论进行了分析计算。

1 问题分析^[2, 3]

图 1 示出光栅 xoy 平面的截面图。图中只画了光栅的一个周期(T), 光栅的最大高度为 h 。本文讨论的是一个具有四阶阶梯良导体反射光栅, 为了讨论方便, 将光栅分为 0 区、I 区、II 区和 III 区。一束 TE 偏振的单位平面波以与 y 轴成 θ 角的方向入射到阶梯良导体反射光栅, E 的方向与 z 轴平行(z 轴从纸内向外) H 的方向与 E 正交。在空间 0 区域, 场分布为入射光波场与反射光波场的叠加, 通常应具有如下形式^[4~6]

$$E^0(x, y) = \exp [i(\alpha_0 x - \beta_0 y)] + \sum_n r_n \exp [i(\alpha_n x + \beta_n y)], \quad x \in (0, T] \quad (1)$$

其中 α_n 、 β_n 为第 n 级衍射的方向余弦。根据光栅分布的周期性有

$$\alpha_n = \alpha_0 + 2n\pi/T, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

其中 $\alpha_0 = k_0 \sin \theta$

$$\beta_n = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \alpha_n^2}, & k_0 \geq |\alpha_n| \\ i \sqrt{\alpha_n^2 - k_0^2}, & k_0 \leq |\alpha_n| \end{cases} \quad (3)$$

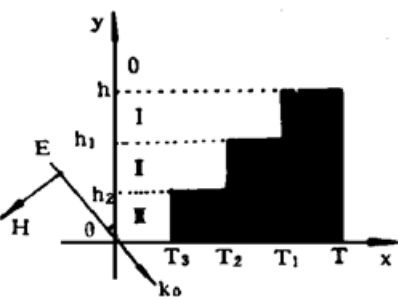


Fig. 1 The cross section of infinite conductivity multilevel grating

在空间 I 区域, 电场强度 E 的解在整个周期 T 上的形式为

$$E^I(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{T_1} x [a_n \sin k_1(n)y + b_n \cos k_1(n)y], & x \in (0, T_1) \\ 0 & x \in [T_1, T] \end{cases} \quad (4)$$

其中 a_n, b_n 为本征解的系数;

$$k_1(n) = \sqrt{|k_0^2 - (n\pi/T_1)^2|} \quad (5)$$

当 $k_0 < |n\pi/T_1|$ 时, (4) 式中括号内的 \sin 函数用 \sinh 函数代替, \cos 函数用 \cosh 函数代替, 空间 II 区域的情况与 I 区非常类似, 只是边界的 x 坐标值不同, 其解的一般形式为

$$E^{II} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{T_2} x [c_n \sin k_2(n)y + d_n \cos k_2(n)y], & x \in (0, T_2) \\ 0 & x \in [T_2, T] \end{cases} \quad (6)$$

其中 c_n, d_n 为本征解的系数。

$$k_2(n) = \sqrt{|k_0^2 - (n\pi/T_2)^2|} \quad (7)$$

当 $k_0 < |n\pi/T_2|$ 时, (6) 式中括号内的 \sin 函数用 \sinh 函数代替, \cos 函数用 \cosh 函数代替, 区域 III 的情况与 I、II 区稍有不同, 该区域的底部($y = 0$) 全为良体, 空间 III 区域的一般解可表示为

$$E^{III}(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin \frac{n\pi}{T_3} [\sin k_3(n)y], & x \in (0, T_3) \\ 0 & x \in [T_3, T] \end{cases} \quad (8)$$

其中 e_n 为本征解的系数。

$$k_3(n) = \sqrt{|k_0^2 - (n\pi/T_3)^2|} \quad (9)$$

当 $k_0 < |n\pi/T_3|$ 时, (8) 式中的括号内的 \sin 函数用 \sinh 函数代替。

2 问题的数值求解

为了求解各个区域的电磁场分布, 必须考虑界面上 E 和 H 的连续性条件。在第 i 区与 $i+1$ ($i = 0, I, II$) 区的边界上, 考虑到电磁场的边界连续条件: 要求 E 在区域 $(0, T)$ 上连续, 且 H 的 x 分量在区域 $(0, T)$ 上连续。为解题方便, 文中采用了 Petit 提出的方法^[7]。界面上场的匹配方程为

$$\begin{cases} E^i(x, h_i) = E^{i+1}(x, h_i), & x \in (0, T) \\ \frac{\partial E^i(x, h_i)}{\partial y} = \frac{\partial E^{i+1}(x, h_i)}{\partial y}, & x \in (0, T) \end{cases} \quad (i = 0, I, II) \quad (10)$$

各区的界面方程分别为:

$$\begin{aligned} & \exp [i(\alpha_0 x - \beta_0 h)] + \sum_n r_n \exp [i(\alpha_n x + \beta_n h)] \\ & = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{T_1} x [a_m \sin k_1(m)h + b_m \cos k_1(m)h], & x \in (0, T_1) \\ 0 & x \in [T_1, T] \end{cases} \quad (11) \\ & \{-i\beta_0 \exp [i(\alpha_0 x - \beta_0 h)] + \sum_n i\beta_n r_n \exp [i(\alpha_n x + \beta_n h)]\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} k_1(m) \sin \frac{m\pi}{T_1} x [a_m \cos k_1(m)h - b_m \sin k_1(m)h], \quad x \in (0, T_1) \quad (12)$$

与上类似, 在区域 I、II 的界面上 ($y = h_1$), 有

$$= \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{T_1} x [a_n \sin k_1(n)h_1 + b_n \cos k_1(n)h_1], & x \in (0, T_1) \\ 0 & x \in [T_1, T] \\ \sum_m \sin \frac{m\pi}{T_2} x [c_m \sin k_2(m)h_1 + d_m \cos k_2(m)h_1], & x \in (0, T_2) \\ 0 & x \in [T_2, T] \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} k_1(n) \sin \frac{n\pi}{T_1} x [a_n \cos k_1(n)h_1 - b_n \sin k_1(n)h_1] \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} k_2(m) \sin \frac{m\pi}{T_2} x [c_m \cos k_2(m)h_1 - d_m \sin k_2(m)h_1], \quad x \in (0, T_2) \end{aligned} \quad (14)$$

同样, 在 II, III 区域边界上 ($y = h_2$), 有

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{T_2} x [c_n \sin k_2(n)h_2 + d_n \cos k_2(n)h_2], & x \in (0, T_2) \\ 0 & x \in [T_2, T] \\ \sum_{m=1}^{\infty} e_m \sin \frac{m\pi}{T_3} x \sin k_3(m)h_2, & x \in (0, T_3) \\ 0 & x \in [T_3, T] \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} k_2(n) \sin \frac{n\pi}{T_2} x [c_n \cos k_2(n)h_2 - d_n \sin k_2(n)h_2] \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} k_3(m) e_m \sin \frac{m\pi}{T_3} x \cos k_3(m)x \cos k_3(m)h_2], \quad x \in (0, T_3) \end{aligned} \quad (16)$$

对方程(11)至(16)进行整理, 有

$$\delta_{n,0} \exp(-i2\beta_0 h) + r_n = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \sin k_1(m)h + b_m \cos k_1(m)h] \exp(-i\beta_n h) I(T_1, n, m) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_m [(-i\beta_0) \delta_{m,0} \exp(-i\beta_0 h) + r_m(i\beta_m) \exp(i\beta_m h)] s(T_1, n - m) \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} k_1(m) [a_m \cos k_1(m)h - b_m \sin k_1(m)h] I(T_1, n, m) \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$I(T_1, n, m) = \begin{cases} \frac{f(T_1, m) [(-1)^m \exp(-i\alpha_n T_1) - 1]}{T \{(\alpha_n)^2 - [f(T_1, m)]^2\}}, & |\alpha_n| \neq |f(T_1, m)| \\ \mp 0.5iT_1/T & \alpha_n = \pm f(T_1, m) \cap m \neq 0 \\ 0 & \alpha_n = \pm f(T_1, m) \cap m = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$f(T, m) = m\pi/T \quad (20)$$

$$s(T_1, n) = \begin{cases} [1 - \exp(-i2n\pi T_1/T)] / (2n\pi) & n \neq 0 \\ T_1/T & n = 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \sum_m [a_m \sin k_1(m)h_1 + b_m \cos k_1(m)h_1] I(T_1, n, m) \\ & = \sum_m [c_m \sin k_2(m)h_1 + d_m \cos k_2(m)h_1] I(T_2, n, m) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_m [a_m \cos k_1(m) h_1 - b_m \sin k_1(m) h_1] J(T_1, n, m) \\ & = \sum_m [c_m \cos k_2(m) h_1 - d_m \sin k_2(m) h_1] I(T_2, n, m) \end{aligned} \quad (23)$$

$$J(T_1, T_2, n, m) = \begin{cases} \frac{[i\alpha_0 \sin f(T_1, m) T_2 + f(T_1, m) \cos f(T_1, m) T_2] \exp(i\alpha_0 T_2) - f(T_1, m)}{T[\alpha_0^2 - f(T_1, m)^2]}, & |\alpha_0| \neq |f(T_1, m)| \\ \frac{\pm 1}{2iT} \left\{ T_2 + \frac{\exp[-i2f(T_1, m) T_2 - 1]}{i2f(T_1, m)} \right\}, & \alpha_0 = \pm f(T_1, m) \cap m \neq 0 \\ 0, & |\alpha_0| = |f(T_1, m)| \cap m = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\sum_m [c_m \sin k_2(m) h_2 + d_m \cos k_2(m) h_2] I(T_2, n, m) = \sum_m e_m \sin k_3(m) h_2 I(T_3, n, m) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \sum_m k_2(m) [c_m \cos k_2(m) h_2 - d_m \sin k_2(m) h_2] J(T_2, T_3, n, m) \\ & = \sum_m k_3(m) e_m \cos k_3(m) h_2 I(T_3, n, m) \end{aligned} \quad (26)$$

将 m, n 取有限值, 可以把上述各方程写成矩阵方程, 解这些矩阵方程, 求出系数 r_n 。

3 光栅参数的优选

光栅衍射效率是参数 $T, T_1, T_2, T_3, h, h_1, h_2$ 的多因数问题。在求解光栅各级衍射系数时, 对衍射级次 l 的大小根据实际情况进行选择, 如果用 $2l + 1$ 级衍射已经得到足够高的精确度, 则采用线性代数的算法求解边界匹配方程组, 即可求得各级衍射波复振幅系数 r_n 。

3.1 典型光栅参数下的衍射效率

对 TE 波, 其各衍射级和衍射效率公式^[7]为

$$er_n = |r_n|^2 \cos \theta_n / \cos \theta \quad (27)$$

其中, θ_n 可由下式求出。

$$\sin \theta_n = \sin \theta + 2n\pi/k_0 T, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (28)$$

本模型光栅负一级衍射效率计算结果和标量衍射理论分析值示于图 2, 实线表示本模型负一级计算结果, 虚线表示标量衍射理论负一级分析值。从衍射效率的分布情况来看, 当光栅周期 T 较大时, 两者吻合的很好。这与标量衍射理论成立的前提是一致的, 说明本模型分析和计算过程是基本正确的。同时, 在图 2 中还可以进一步看出, 当周期 $T < 5\lambda$ ($\lambda/T > 0.2$) 时, 标量衍射理论计算结果与应用矢量衍射理论的本模型计算结果出现明显差别, 这与文献[1]所得出的结论基本一致, 因此, 在实际工程设计时, 必须考虑这一理论上的差别。另外, 本模型计算结果有一很高的峰值, 该处为布拉格 (Bragg) 条件成立的对应点。为检验本模型分析结论的正确性, 除用标量衍射理论分析与之比较外, 还采用另外的近似方法^[8], 如利用良导体表面菲涅耳反射系数来确定电磁场的场分布, 根据光栅的界面分布周期性, 利用傅里叶变换求取各衍射级的系数值, 从而确定各衍射级的衍射效率。一般导体衍射光栅计算分析和实验测试方法及结果将在随后的文章中介绍。(光栅参数为: $T_1 = 0.75T, T_2 = 0.50T, T_3 = 0.25T, h = 0.28T, h_1 = 0.5(T_1 + T_2)h/T, h_2 = 0.5(T_2 + T_3)h/T$, 入射角 $\theta = 15^\circ$)

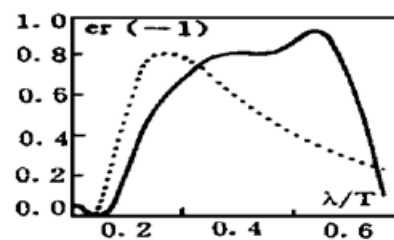


Fig. 2 - 1 order diffraction efficiency curves in infinite conductivity
Solid line, vector model theory, dashed line, scalar theory

3.2 光栅参数的优选

阶梯光栅的衍射效率 er 不仅与光栅周期 T 有关, 还与光栅阶梯最大高度 h , 以及各阶梯宽度 T_1, T_2, T_3 和与之相应的各阶梯高度 h_1, h_2 有关, 因此, 还必须对衍射效率与这些量的关系进行进一步的研究。图 3 和图 4 分别示出了对光栅参数优选前后的结果。衍射效率 er 为光栅周期 T 和刻蚀深度 h 的函数, T_1, T_2, T_3, h_1, h_2 为优选参数。图 3, 图 4 均为二维函数 $er(T, h)$ 的等位线。从图 3 可以看出, 当 h 较小时, 高衍射效率在 T 较大时才有可能达到, 由于高衍射效率 ($> 50\%$) 的区域范围较宽, 这对加工比较有利。图 4 为优选后的结果, 可以看出, 高衍射效率 ($> 50\%$) 的范围比图 3 宽, 而且, 该区域近似为矩形分布, 这不仅有利于公差精度的放宽, 同时, 也有利于在设计时对各个参数进行选择。若进一步放宽对参数 h_1, h_2 的限制, 结果将更好。

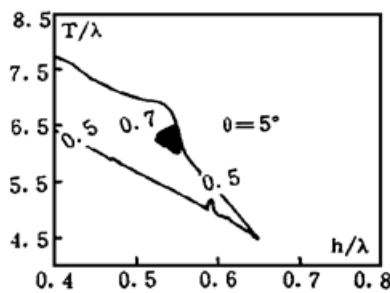


Fig. 3 Unoptimized $er-l(T, h)$ distribution

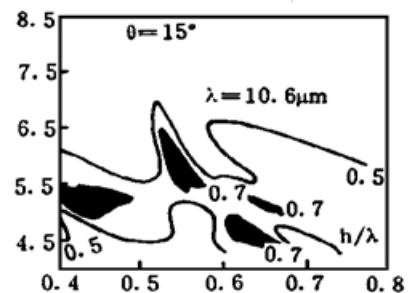


Fig. 4 Optimized $er-l(T, h)$ distribution

小 结 本文在设计高效率聚焦衍射光栅时采用多阶梯模式, 对由电磁场理论分析建立的方程进行了计算, 并用优化方法得出了衍射效率高于 80% 的光栅参数, 与国外文献结果相近, 为此类光栅的设计提供了实用的参考数据。

数值计算结果表明, 多阶梯光栅的衍射效率问题是十分复杂的, 其计算过程也十分复杂, 因而对算法的稳定性有很高的要求, 这在计算过程中十分重要。

参 考 文 献

- [1] D. A. Gremaux, N. C. Gallagher, Limits of scalar diffraction theory for conducting grating. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(11): 1948~ 1953
- [2] [美]P. 劳兰, D. R. 考森著, 陈成钧译, 电磁场与电磁波. 第二版, 北京, 人民教育出版社, 1982: 389~ 408
- [3] 谢处方, 饶克谨, 电磁场与电磁波. 北京, 高等教育出版社, 1987: 299~ 345
- [4] K. Knop, Rigorous diffraction theory for transmission phase gratings with deep rectangular grooves. *J. Opt. Soc. Am.*, 1978, **68**(9): 1206~ 1217
- [5] Y. L. Kok, N. C. Gallagher, Relative phases of electromagnetic waves diffraction by a perfectly conducting rectangular-grooved grating. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1988, **5**(1): 65~ 73
- [6] Y. L. Kok, N. C. Gallagher, R. W. Ziolkowski, Dual series solution to the scattering of plane waves from a binary conducting grating. *IEEE Tran. Ant. and Prop.*, 1989, **37**(7): 901~ 917
- [7] R. Petit, *Electromagnetic Theory of Gratings*. Vol. 22 of Topics in Current Physics. New York: Springer-Verlag, 1980
- [8] J. Turunen, E. Nojonen, A. Vasara et al., Electromagnetic theory of diffractive optics. *Proc. SPIE*, 1992, **1718**: 90~ 98

Diffraction Efficiency of a Perfectly Conducting Multilevel Grating

Shi Jianchuan Li Shen Liu Shenggang

*(Institute of High Energy Electronics,
University of Electronic Science and Technology, Chengdu 610054)*

(Received 16 December 1995; revised 16 April 1996)

Abstract In this paper, the diffraction efficiencies of infinite conductivity multilevel grating is treated by solving Maxwell's equations numerically. The diffraction efficiency problem is solved by using mode matching method. Many important optimization results for engineering design are obtained.

Key words computing optics, perfectly conduction multilevel grating, diffraction efficiency, mode matching, optimization algorithm.