

偶奇 qs 相干态的非经典特性*

王继锁** 孙长勇

(聊城师范学院物理系, 山东聊城 252059)

赵铭健

(临沂师范专科学校, 山东临沂 276005)

摘 要 利用数值计算方法研究了 q 和 s 畸变对双参数形变偶奇 qs 相干态量子统计特性的影响。发现偶奇 qs 相干态与通常的偶奇相干态有着显著不同的量子统计性质, 压缩效应和反聚束效应均可在一定条件下的两种双参数畸变态中出现, 偶奇 qs 相干态与通常偶奇相干态的差异随 q 值偏离 1 越大和 s 的取值越小而越大。

关键词 偶奇 qs 相干态, 压缩效应, 反聚束效应。

1 引 言

众所周知, 偶奇相干态即谐振子湮没算符平方 a^2 的本征态是近年来发现的性质极其独特的量子态^[1, 2], 并已成为量子光学研究的一个重要基本对象; 最近, 王发伯等人^[3]把电磁场系统看成一个 q 畸变振子系统, 形式上将量子光学的概念推广到这种体系中, 构造出了单参数形变偶奇 q 相干态; 朱从旭等人^[4]运用数值计算方法仔细地研究了偶奇 q 相干态的非经典特性, 发现偶奇 q 相干态与通常的偶奇相干态有着显著不同的量子统计特性。另外, 鉴于物理应用的考虑, 近年来多参数形变量子群的研究^[5-10]也受到人们的普遍重视, Chakrabarti 等^[4]首先提出了双参数 qs 形变谐振子, 并构造出了 qs 相干态, 即双参数形变谐振子湮没算符 a_{qs} 的本征态; 周焕强等人^[11]构造出了 a_{qs}^2 的本征态, 即偶奇 qs 相干态, 并且证明了它们的完备性, 但未能讨论其量子统计性质。本文在文献[11]的基础上, 利用数值计算方法定量研究偶奇 qs 相干态的非经典特性, 以揭示两畸变因子 q 和 s 对偶奇 qs 相干态场量子统计特性的影响规律, 并以期通过这一工作, 能为人们研究双参数形变电磁场的量子统计特性带来一些有益的帮助。

2 偶奇 qs 相干态的定义^[11]

由文献[11]可知, 双参数形变谐振子湮没算符二次幂 a_{qs}^2 的本征值为 α^2 的两个正交归一

* 山东省自然科学基金资助项目。

** 中国高等科学技术中心(世界实验室)。

收稿日期: 1996 年 1 月 10 日

本征态即偶奇 qs 相干态的定义分别为^[11]:

$$|\alpha\rangle_{qs}^e = |\psi_0\rangle_{qs} = [\cosh_{qs}(|\alpha|^2)]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]_{qs}!}} |2n\rangle_{qs}, \quad (1)$$

$$|\alpha\rangle_{qs}^o = |\psi_1\rangle_{qs} = [\sinh_{qs}(|\alpha|^2)]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]_{qs}!}} |2n+1\rangle_{qs}, \quad (2)$$

$$[n]_{qs} = \frac{(s^{-1}q)^n - (sq)^{-n}}{s^{-1}q - s^{-1}q^{-1}}, \quad (3)$$

qs -阶乘 $[n]_{qs}!$ 由 $[n]_{qs}! = [n]_{qs}[n-1]_{qs}\cdots[2]_{qs}[1]_{qs}$ 给出, 并规定 $[0]_{qs}! = 1$; 而函数 $\cosh_{qs}(x)$ 和 $\sinh_{qs}(x)$ 分别表示双曲余弦和双曲正弦函数的 qs 类似, 函数 e_{qs}^x 为指数函数的 qs 类似^[11].

$$\cosh_{qs} x = \frac{e_{qs}^x + e_{qs}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2n]_{qs}!}, \quad \sinh_{qs} x = \frac{e_{qs}^x - e_{qs}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_{qs}!}, \quad (4)$$

由(1)、(2)式并利用文献[11]中的(20)式和(21)式得到

$$a_{qs} |\psi_0\rangle_{qs} = \alpha [\tanh_{qs}(|\alpha|^2)]^{1/2} |\psi_1\rangle_{qs}, \quad a_{qs} |\psi_1\rangle_{qs} = \alpha [\coth_{qs}(|\alpha|^2)]^{1/2} |\psi_0\rangle_{qs}, \quad (5)$$

3 偶奇 qs 相干态的非经典特性

3.1 偶奇 qs 相干态的压缩特性

类似于通常单模电磁场压缩的定义, 引进 qs 电磁场的 qs 压缩(以下简称压缩)。 qs 电磁场的两个正交分量按 qs 产生算符 a_{qs}^+ 和 qs 湮没算符 a_{qs} 表示为

$$X_1^{qs} = \frac{1}{2} (a_{qs}^+ + a_{qs}), \quad X_2^{qs} = \frac{i}{2} (a_{qs}^+ - a_{qs}), \quad (6)$$

算符 X_1^{qs} 和 X_2^{qs} 满足下列对易关系

$$[X_1^{qs}, X_2^{qs}] = \frac{i}{2} [a_{qs}, a_{qs}^+] \quad (7)$$

且 a_{qs}^+ 、 a_{qs} 及 qs 粒子数算符 N_{qs} 满足如下的对易关系^[9, 10]

$$a_{qs} a_{qs}^+ - s^{-1} q a_{qs}^+ a_{qs} = (sq)^{-N_{qs}} \quad (8)$$

$$[N_{qs}, a_{qs}^+] = a_{qs}^+, \quad [N_{qs}, a_{qs}] = -a_{qs}, \quad (9)$$

(7)式导致下列测不准关系:

$${}_{qs}\langle (\Delta X_1^{qs})^2 \rangle_{qs} {}_{qs}\langle (\Delta X_2^{qs})^2 \rangle_{qs} \geq \frac{1}{4} |{}_{qs}\langle [X_1^{qs}, X_2^{qs}] \rangle_{qs}|^2, \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{若} \\ \text{或} \end{array} \right\} \begin{array}{l} {}_{qs}\langle (\Delta X_i^{qs})^2 \rangle_{qs} < \frac{1}{4} {}_{qs}\langle [q_{qs}, q_{qs}^+] \rangle_{qs}, \\ {}_{qs}\langle (\Delta X_i^{qs})^2 \rangle_{qs} - \frac{1}{4} {}_{qs}\langle [q_{qs}, q_{qs}^+] \rangle_{qs} < 0, \end{array} \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

则称 X_i^{qs} 分量存在 qs 压缩(简称压缩)。

本文仅讨论偶奇 qs 相干态的 X_1^{qs} 分量的压缩特性(X_2^{qs} 分量的讨论方法与之相同)。

利用(5)式和偶奇 qs 相干态的正交归一性^[11], 由(1)、(2)式易于求得

$${}_{qs}\langle \psi_0 | a_{qs}^+ | \psi_0 \rangle_{qs} = {}_{qs}\langle \psi_1 | a_{qs}^+ | \psi_1 \rangle_{qs} = r^2 \exp(-i2\varphi), \quad (12)$$

$${}_{qs}\langle \psi_0 | a_{qs}^2 | \psi_0 \rangle_{qs} = {}_{qs}\langle \psi_1 | a_{qs}^2 | \psi_1 \rangle_{qs} = r^2 \exp(i2\varphi), \tag{13}$$

$${}_{qs}\langle \psi_0 | a_{qs}^+ | \psi_0 \rangle_{qs} = {}_{qs}\langle \psi_1 | a_{qs}^+ | \psi_1 \rangle_{qs} = 0, \tag{14}$$

$${}_{qs}\langle \psi_0 | a_{qs}^+ a_{qs} | \psi_0 \rangle_{qs} = r^2 \tanh_{qs}(r^2), \quad {}_{qs}\langle \psi_1 | a_{qs}^+ a_{qs} | \psi_1 \rangle_{qs} = r^2 \coth_{qs}(r^2), \tag{15}$$

式中 $\alpha = r \exp(i\varphi)$ 。将(12)~(15)式代入(11)式得

$${}_{qs}\langle \psi_0 | (\Delta X^q)^2 | \psi_0 \rangle_{qs} - \frac{1}{4} {}_{qs}\langle \psi_0 | [a_{qs}, a_{qs}^+] | \psi_0 \rangle_{qs} = \frac{1}{2} r^2 [\tanh_{qs}(r^2) + \cos(2\varphi)], \tag{16}$$

$${}_{qs}\langle \psi_1 | (\Delta X^q)^2 | \psi_1 \rangle_{qs} - \frac{1}{4} {}_{qs}\langle \psi_1 | [a_{qs}, a_{qs}^+] | \psi_1 \rangle_{qs} = \frac{1}{2} r^2 [\coth_{qs}(r^2) + \cos(2\varphi)], \tag{17}$$

由(16)式(或(17)式)可知, 若取 $\varphi = \pi/2$, 则只要在 $\tanh_{qs}(r^2) < 1$ (或 $\coth_{qs}(r^2) < 1$) 的范围内, 偶(或奇) qs 相干态便可存在压缩效应。特别, 当 $q = s = 1$ 时由于 $\tanh(r^2) < 1$ 、 $\coth(r^2) > 1$, 因此通常的偶相干态存在压缩效应而奇相干态不具有压缩特性^[1]; 当 $q < 1$ 时, 函数 $\tanh_q(r^2)$ 和 $\coth_q(r^2)$ 在 q 取不同值时随 r^2 的变化情况见文献[4]的图4。本文借助于数值计算方法研究当 q 和 s 分别取不同值时函数 $\tanh_{qs}(r^2)$ 和 $\coth_{qs}(r^2)$ 随 r^2 的变化情况。

在图1~图4中, 针对两畸变参数 q 和 s 几种不同的取值, 分别作了函数 $\tanh_{qs}(r^2)$ 和 $\coth_{qs}(r^2)$ 随 r^2 的变化曲线。

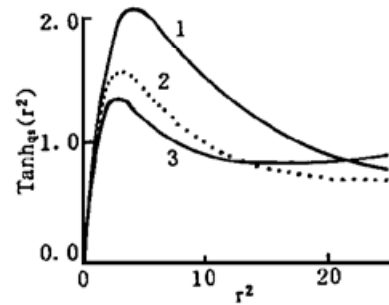
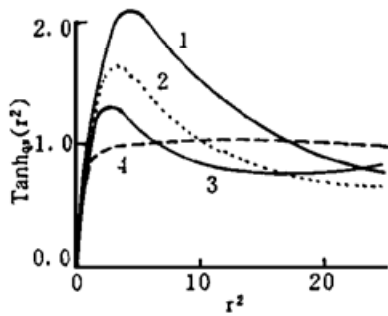


Fig. 1 The r^2 dependence of function $\tanh_{qs}(r^2)$ when $q = 0.2$. Lines 1, 2, 3 and 4 correspond to $s = 0.3, 0.5, 0.8$ and 2 , respectively

Fig. 2 The r^2 dependence of function $\tanh_{qs}(r^2)$ when $s = 0.3$. Lines 1, 2 and 3 correspond to $q = 0.2, 0.4$ and 0.8 , respectively

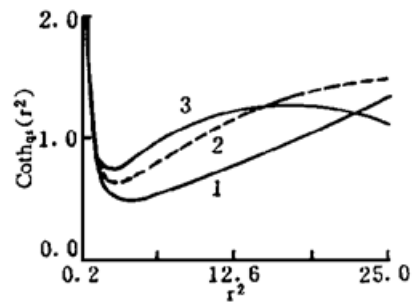
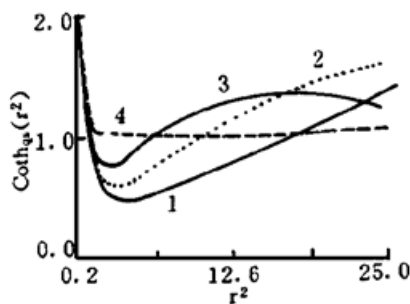


Fig. 3 The r^2 dependence of function $\coth_{qs}(r^2)$ when $q = 0.2$. Lines 1, 2, 3 and 4 correspond to $s = 0.3, 0.5, 0.8$ and 2 , respectively

Fig. 4 The r^2 dependence of function $\coth_{qs}(r^2)$ when $s = 0.3$. Lines 1, 2 and 3 correspond to $q = 0.2, 0.4$ and 0.8 , respectively

图1、2表明, 当 $q < 1$ 时, 在 r^2 的一定取值范围内函数 $\tanh_{qs}(r^2) \geq 1$, 且这个范围随 q 偏离1越大和 s 的取值越小而越宽, 与通常的偶相干态的压缩特性相比, 由(16)式可知, 它对应于 qs 偶相干态在此范围内不会呈现压缩效应, 且这个特性反常的区域随 q 偏离1越大和 s

的取值越小而越宽。

图 3、4 表明, 当 $q < 1$ 时, 在 r^2 的一定取值范围内, 函数 $\coth_{qs}(r^2) < 1$, 且这个范围也随 q 偏离 1 越大和 s 的取值越小而越宽, 与通常的奇相干态的压缩特性相比, 由(17) 式可知, 它对应于 qs 奇相干态在此范围内呈现压缩效应, 且这个特性反常的区域也随 q 偏离 1 越大和 s 的取值越小而越宽。

另外, 将图 1 与图 3、图 2 与图 4 分别进行对比, 可以发现, 在 q 和 s 分别取两个固定值的情况下, 若在 r^2 的某些取值范围内偶 qs 相干态不出现压缩效应; 则在此情况下, 在此范围内, 奇 qs 相干态将出现压缩效应。

3.2 偶奇 qs 相干态的反聚束特性

对于通常的电磁场, 若归一的二阶相关函数^[12] $g^{(2)}(0) < 1$, 则称电磁场呈现反聚束效应。类似地, 对于 qs 电磁场, 也可引入 qs 电磁场的二阶 qs 相关函数

$$g_{qs}^{(2)}(0) = \frac{{}_{qs}\langle a_{qs}^+ a_{qs}^2 \rangle_{qs}}{{}_{qs}\langle a_{qs}^+ a_{qs} \rangle_{qs}^2}, \quad (18)$$

同样, 若 $g_{qs}^{(2)}(0) < 1$, 则称这种 qs 电磁场呈现反聚束效应。

由(5) 式, 分别对偶奇 qs 相干态可直接求得 $g_{qse}^{(2)}(0)$, $g_{qso}^{(2)}(0)$:

$$g_{qse}^{(2)}(0) = \coth_{qs}(r^2), \quad g_{qso}^{(2)}(0) = \tanh_{qs}(r^2) \quad (19)$$

特别, 当 $q = s = 1$ 时, 由于 $\coth(r^2) > 1$, $\tanh(r^2) < 1$; 因此通常的偶相干态总是聚束的, 而奇相干态是反聚束的; 当 $s = 1$ 、 $q < 1$ 时即为单参数形变 q 偶奇相干态的反聚束特性^[4]。

通过 3.1 节的讨论, 由(19) 式可以得到, 在 $q < 1$ 的情况下, 对于 q 和 s 的分别不同取值, 在 r^2 的一定取值范围内, 偶 qs 相干态会出现反聚束现象而奇 qs 相干态则出现超聚束现象(见图 3、4 和图 1、2), 故在此范围内偶奇 qs 相干态与通常偶奇相干态的相干特性是不同的, 且 q 偏离 1 越大和 s 的取值越小, 这个特性反常的区域越宽。

另外, 由(16) 式、(17) 式和(19) 式并将图 1 与图 3、图 2 与图 4 分别进行比较还可以看出, 在 q 和 s 分别取两个固定值的情况下, 若偶 qs 相干态在 r^2 的某一取值范围内不呈现压缩效应, 则在此范围内它便出现反聚束效应; 同样, 若奇 qs 相干态在 r^2 的某一取值范围内不呈现反聚束现象, 则在此范围内便存在压缩效应。

结 论 本文利用数值计算方法分别研究了双参数形变偶奇 qs 相干态的 qs 压缩和反聚束特性。结果表明, 在场的量子统计特性方面, 偶奇 qs 相干态非常不同于通常的偶奇相干态, 偶奇 qs 相干态可以出现通常偶奇相干态所不具有的非经典特性, 双参数 q 和 s 畸变可以使偶奇相干态原有的非经典效应削弱甚至消失。当 $q < 1$ 且 q 减小(或 $q' > 1$ 且 q' 增大, $q' = q^{-1}$) 和 s 的取值减小时, 由双参数 q 和 s 畸变所带来的场的量子统计特性相对于通常谐振子偶奇相干态场的变化也变大。畸变程度可由分别控制 q 和 s 的大小来实现。

由本文的讨论可见, 双参数形变偶奇 qs 相干态不仅包含了通常偶奇相干态的情况($q = s = 1$ 时), 而且也把单形参数形变偶奇 q 相干态的情况^[4] ($s = 1$ 、 $q \neq 1$) 包含在内。这说明由双参数形变振子构成的体系比通常谐振子体系或单参数形变振子体系具有更广泛的物理内涵, 这种体系一旦在实验上实现, 人们便可通过分别控制 q 和 s 参数来实现控制场的某些量子统计特性。因此这种体系有着潜在的重要应用前景, 值得人们深入研究。

参 考 文 献

- [1] Yunjie Xia, Guangcan Guo, Nonclassical properties of even and odd coherent states. *Phys. Lett. (A)*, 1989, **A136**(6) : 281~ 283
- [2] 夏云杰, 李洪珍, 郭光灿, 奇偶相干态的高阶压缩及其准概率分布函数. *物理学报*, 1991, **40**(3) : 386 ~ 392
夏云杰, 郭光灿, 奇偶相干态的某些性质. *量子电子学*, 1988, **5**(4) : 301~ 305
- [3] F. B. Wang, L. M. Kuang, Even and odd q -coherent state representations of the quantum Heisenberg-Weyl algebra. *Phys. Lett. (A)*, 1992, **169**(4) : 225~ 228
- [4] 朱从旭, 王发伯, 匡乐满, 关于奇偶 q 相干态的非经典特性. *物理学报*, 1994, **43**(8) : 1262~ 1267
- [5] E. E. Demidov, Yu. I. Manin *et al.*, Non-standard quantum deformations of $GL(n)$ and constant solutions of the Yang Baxter equation. *Prog. Theor. Phys. Supp.*, 1990, **102** : 203~ 218
- [6] A. Sudbery, Consistent multiparameter quantisation of $GL(n)$. *J. Phys. (A)*, 1990, **23**(14) : L697 ~ L704
- [7] A. Schirramcher, J. Wess, B. Zumino, The two-parameter deformation of $GL(2)$, its differential calculus, and Lie algebra. *Z. Phys. (C)*, 1991, **49**(2) : 317~ 324
- [8] C. Burdick, L. Hlavaty, A two-parametric quantization of $sl(2)$. *J. Phys. (A)*, 1991, **24**(4) : L165~ L168
- [9] R. Chakrabarti, R. Jagannathan, A (p, q) -oscillator realization of two-parameter quantum algebras. *J. Phys. (A)* 1991, **24**(3) : L711~ L718
- [10] S. Jing, The Jordan-Schwinger realization of two-parametric quantum group $sl_{q,s}(2)$. *Mod. Phys. Lett. (A)*, 1993, **8**(6) : 543~ 548
- [11] 周焕强, 贺劲松, 张新明, 双参数形变谐振子湮没算符二次幂的本征态. *高能物理与核物理*, 1995, **19**(3) : 251~ 257
- [12] D. F. Walls, Squeezed states of light. *Nature*, 1983, **306**(10) : 141~ 146

Nonclassical Properties of Even and Odd qs -Coherent States

Wang Jisuo Sun Changyong

(Department of Physics, Liaocheng Teachers' College, Shandong 252059)

Zhao Mingjian

*(Linyi Teachers' College, Shandong 276005)**(Received 10 January 1996)*

Abstract The numerical method is used to study the influences of q and s deformation on the quantum statistical properties of even and odd qs -coherent states. It is shown that nonclassical properties of even and odd qs -coherent states are very different from those of the usual even and odd coherent states. It is found that squeezing and antibunching effect appear for both even and odd qs -coherent states in some range of the parameters q , s and r . The smaller the q ($q < 1$) and s , the larger the difference between even and odd qs -coherent states and the usual even and odd coherent states.

Key words even and odd qs -coherent states, squeezing effect, antibunching effect.