

光学 CT 二维正向问题有限元法 数值模拟的研究*

高 峰 牛 憨 笨

(中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068)

摘 要 简述了光学 CT 正模型的有限元(FEM)解理论, 给出了二维圆形组织体光学 CT 正问题的有限元法解的数值模拟结果, 该结果对于生物组织体内光子传输行为以及光 CT 逆问题的理论和实验研究具有重要的指导意义。

关键词 光学 CT, 正问题, 有限元法, 扩散方程, 数值模拟。

1 引 言

求解光学 CT 问题的一个有效方法是基于正向模型解的迭代图像重建算法^[1, 2], 该方法通过建立给定模型解与测量值之误差范数, 并使之极小化而求得满足边界测量值要求的组织体光学参数分布(图像重建), 其具体实现算法中均涉及大量的正问题计算, 因此正模型快速有效的求解对于光学 CT 的实现至关重要。

描述光子在生物组织体内传输行为的数学模型目前主要有两种: Monte-Carlo(MC)法和基于扩散方程的有限元法。相对而言, 有限元法对于散射占优组织体具有 MC 法同样的广适性而计算量则小得多, 因而特别适于上述迭代图像重建算法。关于光 CT 正模型的解, Arridge 等人已作了大量的工作^[3, 4], 但仅限于边界激励和小尺寸不均匀性下时间独立量分布的研究, 为了全面了解组织体内光子的传输行为, 除有必要观察不同激励位置和不均匀性尺寸下有关时间独立量分布特征外, 还应模拟计算边界点上的时间点扩展函数分布, 后者对于实际光探测器(如条纹相机)空间与时间分辨率的选定具有重要意义。本文系统讨论了光学 CT 二维正向模型有限元法数值模拟问题, 为了使计算结果具有普遍性, 计算了中心和边界激励下, 均匀组织体内部及边界处光子密度及测量参数的分布, 大小尺寸不均匀性插入后所引起的变化, 以及特殊边界点上测量参数的时间点扩展函数。所得结果对光 CT 正问题和逆问题的理论和实验研究, 以及光源和光探测器的设计都具有重要的指导作用。

2 光子传输模型及其有限元解

根据辐射传输理论, 生物组织体内光子传输行为可由下列扩散方程近似描述^[1]

* 此项研究系中国科学院“八五”重点预研项目。

收稿日期: 1995 年 9 月 11 日; 收到修改稿日期: 1996 年 4 月 19 日

$$\{\nabla \kappa(\mathbf{r}) \nabla - \mu_a c\} \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -q(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

其中 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 为光子密度; μ_a , μ_s , $\kappa = c/3(\mu_a + \mu_s)$ 分别为吸收, 退化散射和扩散系数; c 为光速, q 为源。为应用有限元法解上述方程, 首先剖分求解域 Ω , 剖分单元连于 D 个节点 N_j , 节点光子密度和形状函数分别为 $\mathbf{h}(t) = [h_1(t), \dots, h_D(t)]^T$, $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = [g_1(\mathbf{r}), \dots, g_D(\mathbf{r})]^T$ 。实际中常用的测量参数为边界处 $\partial\Omega$ 的积分光强和光子平均飞行时间^[1]。

应用 Galerkin 法求解方程(1), 可得下列矩阵方程

$$\mathbf{K}(\kappa, \mu_a c) \mathbf{h}(t) + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{h}(t)}{\partial t} = \mathbf{Q}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2)$$

其中 \mathbf{K} 、 \mathbf{B} 为 $D \times D$ 维矩阵, \mathbf{Q} 、 \mathbf{b} 为 D 维列矢量, 其元素计算见文献[1, 3, 4]。上述模型的有限元法求解时通常作两点假设: 1) 源为时空上的 δ 函数, 于是 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 是 Green 函数或某源点下 \mathbf{r} 处的时间点扩展函数(TPSF); 2) 光子密度满足 Dirichlet 边界条件, 这由令边界节点上的形状函数为零实现, 由此, (2) 式中的 \mathbf{b} 项为零且各矩阵维数减为 $D_{int} = D - D_b$ (D_b 为边界节点数), 实际计算中一般将边界节点编为最后节点, 因此只需删除(2) 式中变量及矩阵最后 D_b 行及列即可。

(2) 式的时间依赖形式解(Crank-Nicholson 规则)为:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 \mathbf{h}_0 &= \mathbf{Q}^{(\delta)} \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{h}_{k+1} &= -\mathbf{C}_2 \mathbf{h}_k \quad \forall k \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{C}_1 = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K} + \mathbf{B}$, $\mathbf{C}_2 = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K} - \mathbf{B}$, $\mathbf{Q}^{(\delta)} = \int_{-0}^{+0} \mathbf{Q}(t) dt = \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\Omega = \mathbf{g}(\mathbf{r}_0)$, Δt 为离散时间间隔, 对(2) 式两边求时间积分, 可得时间独立形式解

$$\mathbf{K}(\kappa, \mu_a c) \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{Q}^{(\delta)} \quad (4)$$

这里 $\hat{\mathbf{h}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t) dt$ 。对(1) 式两边取傅里叶变换, 频域求导, 再经傅里叶反变换可得时间加权光子密度的直接求解形式:

$$\hat{\mathbf{h}}^{(\lambda)} = \{\mathbf{K}(\kappa, \mu_a c)\}^{-1} \mathbf{B} \hat{\mathbf{h}} \quad (5)$$

其中 $\hat{\mathbf{h}}^{(\lambda)} = \int_{-\infty}^{+\infty} t \mathbf{h}(t) dt$ 。鉴于(1) 式有限元法求解所得矩阵方程之系数阵 \mathbf{K} , \mathbf{B} , \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 为大型正定带状稀疏对称矩阵, 采用非零元稀疏阵存储以节省内存, 并采用基于 Cuthill-Mckee 对称最小集度节点优化技术的 Cholesky 分解法求解矩阵方程以减少运算量。

3 二维问题的数值模拟及讨论

理论上, 二维问题对应于无限长柱形组织体由平行无限长线源激励的情形。本文限定为二维圆域, 参数为: 半径 $a = 25 \text{ mm}$, $\mu_a = 0.025 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_s = 2.0 \text{ mm}^{-1}$ 。其三角元剖分网格如图 1 所示, 为计算稳定起见, 节点数随剖分圆环半径线性递增, 此种剖分可保证剖分元尺寸大致相等且所有剖分三角形内角小于 90° 。为保证精度, 计算中取剖分圆环数 $N = 40$, 则节点数和剖分单元数分别为 4921 和 9600, 边界节点数为 240。

3.1 中心激励

中心激励具有重要的理论意义。图 2 为中心激励下组织体内积分光子密度及时间加权积

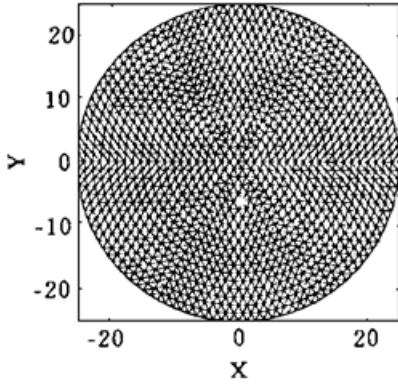


Fig. 1 Mesh for FEM solution of the forward problem

光子密度的分布，两者均呈中心对称分布，其值沿径向衰减到零。这与组织体的几何结构和源的位置一致。图 3 为半径 1.6 mm 的圆形小吸收体 ($\mu_a = 0.5 \text{ mm}^{-1}$) 及散射体 ($\mu_s = 8.0 \text{ mm}^{-1}$) 插入 ($\rho = 12.5 \text{ mm}$, $\theta = 90^\circ$) 处所引起的积分光子密度的变化。图 4 为半径 8.0 mm 的圆形大吸收体及散射体插入 A 处所引起的积分光子密度的变化。对小吸收体，光子密度呈衰减变化，大致为吸收体中心对称分布；对大吸收体，由于受到激励源作用的影响，光子密度变化呈左右对称分布。因此，吸收体的作用可近似描述为吸收体中心对称分布的负向激励源。散射体作用与吸收体相反，光子在其中“堆积”，光子密度呈增长变化且左右对称分布。在小尺寸散射体不均匀性作用中观察到积分光子密度变化“双峰”，此现象可解释为纯散射体之大散射系数和零吸收系数共同作用的结果。大尺寸散射体中由于散射占优，“双峰”现象消失。散射作用可近似描述为位于散射体中心的正向激励源，与光子密度的散度有关，所引起的变化一般不具中心对称性。对实际中的非纯散射体，散射的加强还会同时引起

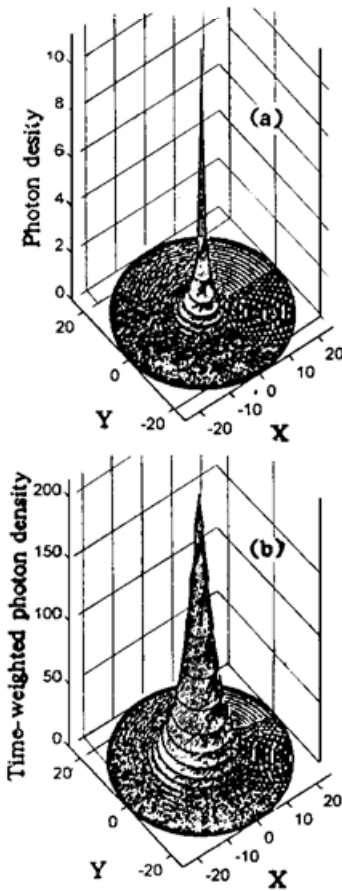


Fig. 2 Distribution of (a) integrated photon density and (b) time-weighted integrated photon density under the stimulation of centered source

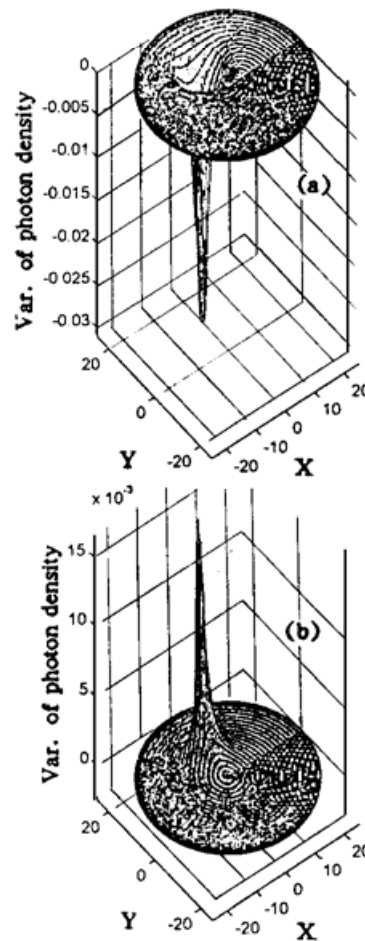


Fig. 3 Variation of integrated photon density caused by a small inhomogeneity under stimulation of centered source. (a) absorber, (b) scatterer

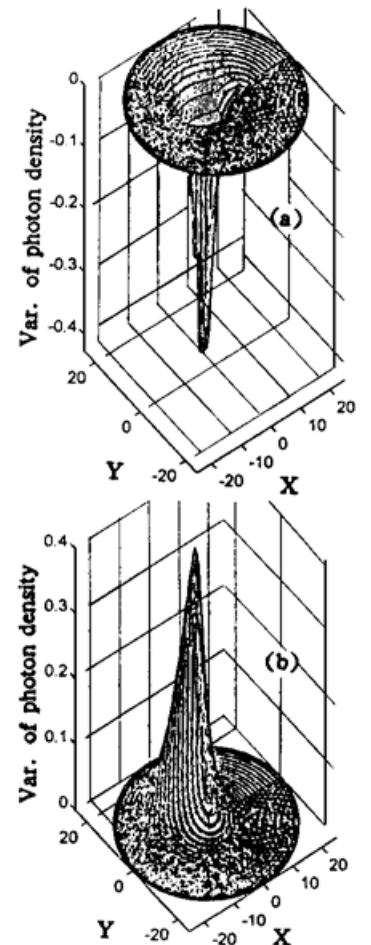


Fig. 4 Variation of integrated photon density caused by a large inhomogeneity under stimulation of centered source. (a) absorber, (b) scatterer

其中的吸收随之加强, 从而综合表现更为复杂, 通常变化的正负峰同时存在, 该现象在非纯散射体不均匀性的数值模拟中可观察到, 称此现象为吸收的散射牵引。

3.2 边界激励

边界激励(不均匀性参数及位置与中心激励相同)与光学 CT 的实现方案一致^[1, 2], 此时主要关心边界点上的光强和光子平均飞行时间等测量参数。计算时为保证上述第二点假设, 令源位于 $(a - 1/\mu_s', 0^\circ)$ 处。图 5 为边界激励下, 均匀组织体边界上积分光强及光子平均飞行时间分布。上述分布沿 180° 检测角对称分布, 在 180° 检测角(距源点最远)处积分光强及光子平均飞行时间达到极值, 其中积分光强下降约 9 个数量级。这点在光源功率和探测器灵敏度设计时应充分考虑。图 6 给出了小尺寸(a)和大尺寸(b)不均匀性插入后, 边界上积分光强与光子平均飞行时间的变化。对小尺寸吸收体, 在边界上距不均匀性最近点(90°)附近形成变化峰值, 随不均匀性尺寸的增大, 光子密度和光子平均飞行时间的变化峰值分别趋向小于和大于 90° 方向; 散射体引起的变化较复杂, 其中光子密度变化峰值位于小于 90° 检测角处, 而平均飞行时间变化峰值则位于源点和不均匀性中心连线与边界之交集(126°)附近。

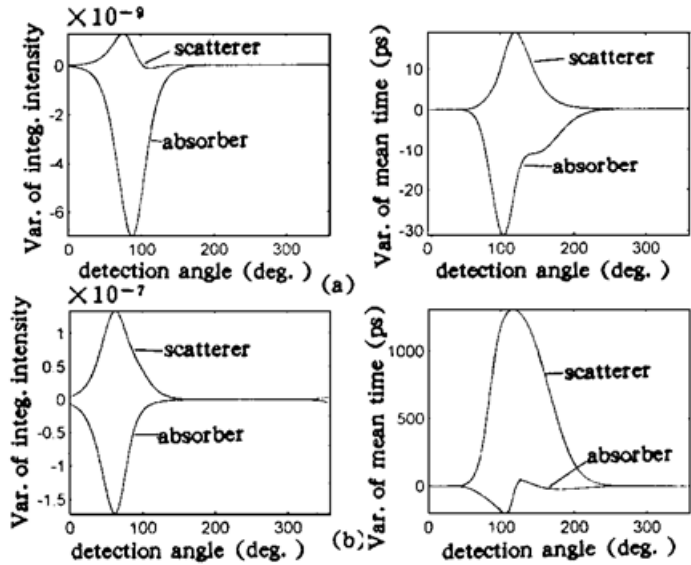
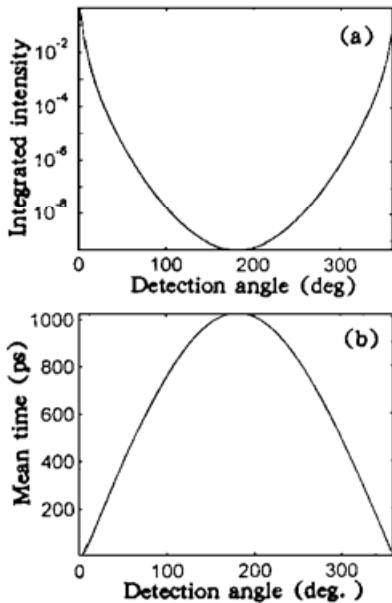


Fig. 5 Distribution of (a) integrated intensity and (b) mean time of flight on the boundary of homogeneous tissue under the boundary stimulation

Fig. 6 Variation of integrated intensity and mean time of flight on the boundary with insertion of (a) small inhomogeneity and (b) large inhomogeneity

3.3 时间点扩展函数

图 7 为边界激励下, 0° 、 90° 或 180° 检测角边界处的光强度时间点扩展函数, 随检测点与源点距离的加大, 发生瞬态波形峰值的时刻随之滞后, 且幅度下降。若以峰值的 5% 计, 则可求得波形到达时刻分别为 1.81 ps, 121.72 ps 和 166.46 ps, 分别对应于源点与检测点间的光子直线飞行时间。插入吸收体或散射体后, 波形后沿下降随之加快或减慢, 其中以 90° 检测角处变化最为明显。

上述所有计算均取真空光速, 实际中光子密度、光强及飞行时间等参数均应乘以组织体的光折射率。今后将深入研究光 CT 正向问题的 Monte-Carlo 解, 以进一步验证上面有限元法的正确性和广适性。

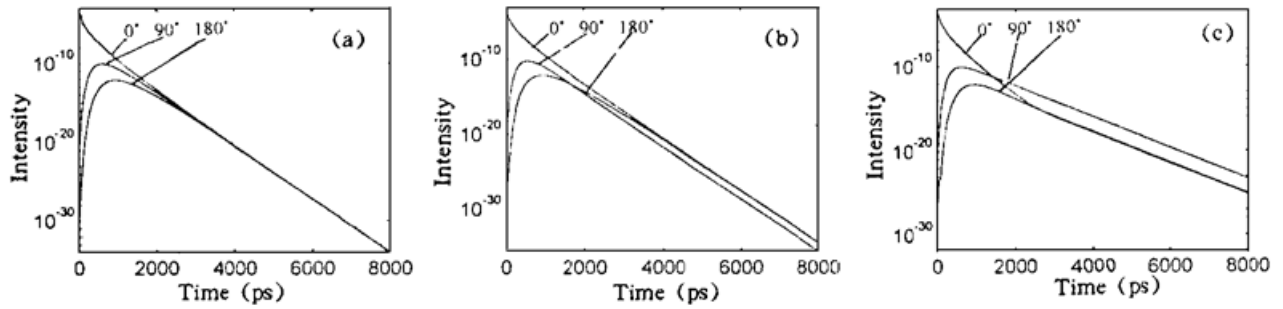


Fig. 7 Temporal point-spread functions of transmitted-light intensity on the boundary with the detection angles of 0° , 90° and 180° for (a) homogeneous tissue, (b) insertion of an absorber and (c) insertion of a scatterer

本文作者感谢中国科学院对此项研究工作的支持。

参 考 文 献

- [1] M. Schweiger, S. R. Arridge, D. T. Delpy *et al.*, Application of the finite element method for the forward and inverse models in optical tomography. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 1993, (3) : 263~ 283
- [2] 高峰, 牛憨笨, 光学 CT 中的图像重建算法. *光学学报*, 1996, 16(4) : 494~ 499
- [3] S. R. Arridge, M. Schweiger, M. Hiraoka *et al.*, A finite element approach for modelling photon transport in tissue. *Med. Phys.*, 1993, 20(2) : 299~ 309
- [4] M. Schweiger, S. R. Arridge, M. Hiraoka *et al.*, Application of the finite element method for the forward model in infra-red absorption imaging. *Proc. SPIE*, 1992, 1768 : 97~ 108

Study on Numerical Simulation of 2-D Forward Problems in Optical CT

Gao Feng Niu Hanben

(Xian Institute of Optics & Precision Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Xian 710068)

(Received 11 September 1995; revised 19 April 1996)

Abstract This paper describes the theory about the finite element method (FEM) solution for the forward model of optical CT, and gives numerically simulated results of the FEM solution to 2-dimensional circle problem. These results are of importance to the theoretical and experimental study on the forward and inverse photon transport in tissue in optical CT problems.

Key words optical CT (optical tomography), forward problem, finite element method, diffusion equation, numerical simulation.