

光子计数剪切干涉仪波前探测 自适应光学系统噪声分析*

饶长辉 姜文汉 李明全

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

摘 要 在自适应光学系统中, 波前探测器的噪声是主要误差源。针对我们建立的 2.16 m 望远镜红外自适应光学系统, 从伺服控制系统的角度分析了光子计数噪声及其在系统闭环过程中的传递, 从理论上推导了系统的噪声功率谱、伺服传递函数以及开环和闭环噪声公式。另外, 还给出了在系统中实测的开环和闭环噪声。

关键词 自适应光学, 波前探测, 剪切干涉仪, 光子计算, 散粒噪声。

1 引 言

大气光学传输受到湍流的干扰是众所周知的。在可见光波段, 4 m 级望远镜的衍射极限分辨率可以达到 0.03 角秒。但由于大气湍流的影响, 如果没有补偿措施, 将受限于大气视宁度(0.5~ 2"), 其实际分辨率并不比 0.1~ 0.2 m 的望远镜好。应用自适应光学技术可以实时对湍流效应进行补偿^[1~ 3]。从原理上说, 自适应光学系统是一个闭环控制系统, 它主要由波前探测器、波前处理器以及波前校正器组成。自适应光学闭环系统对大气湍流的响应而言是抑制低频成分的高通滤波器, 对波前探测器噪声而言则是抑制高频成分的低通滤波器。闭环校正的实质是以探测器噪声谱的引入为代价换取湍流功率谱校正的收益, 当湍流校正大于引入的探测器噪声时才有校正效果。因此系统的噪声水平是评价自适应光学系统性能好坏的一个重要依据, 也是影响系统闭环成像效果的一个主要因素。

虽然国外发表过一些自适应光学系统噪声方面的文章^[4, 5], 但是都只限于理论上的分析, 没有给出实验结果。作者建立了一套 21 单元自适应光学系统, 并与北京天文台 2.16 m 望远镜对接, 用来进行红外自适应光学成像补偿观测。本文以该系统为基础, 对该系统的噪声情况进行了理论上的分析, 给出了实验结果, 通过剪切干涉噪声引入以及系统模型建立, 分析了该系统的噪声功率谱和噪声传递函数, 导出了系统开环和闭环噪声公式。

2 自适应光学系统原理方框图

自适应光学系统是一个闭环控制系统, 主要由波前探测器(WFS)、波前校正器(DM)以

* 国家高技术计划资助项目。

及波前处理器(WFP)组成。

图 1 是 2.16 m 望远镜红外自适应光学系统原理框图。波前探测器用来进行波前测量。波前处理器依据波前探测器探测到的波前进行斜率计算(GC)、波前重构(WFR)以及控制算法(CC)，最后通过 D/A 转换(DAC)输出控制信号。波前校正器根据波前处理器送出的控制信号经高压放大器(HVA)放大产生变形，以校正湍流波前。

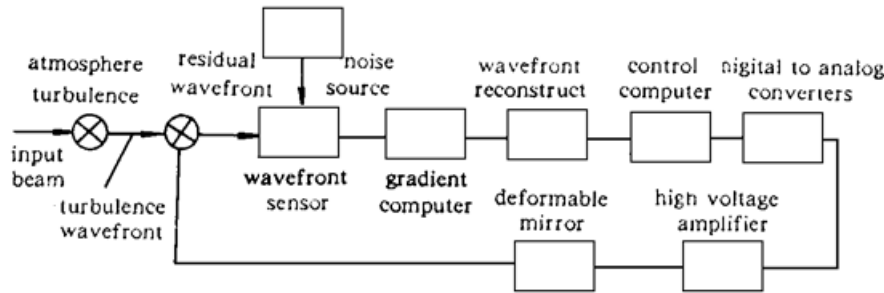


Fig. 1 Block diagram of adaptive optics

3 噪声引入

在本系统中，噪声主要是从波前探测器引入的。这里采用光子计数动态交变剪切干涉仪作为波前探测器。其基本原理如图 2 所示^[2,3]，它主要由横向交变剪切干涉仪、阵列透镜、32 通道光子计数器阵列和斜率处理器四部分组成。

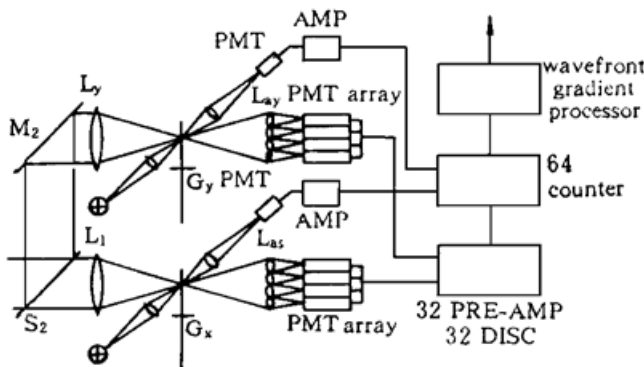


Fig. 2 Schematic diagram of shearing interferometer

S2: splitter; M2: mirror; Lx, Ly: lens;
Gx, Gy: grating; Lax, Lay: lenslet array;
AMP: amplifier; PMT: photon-multiplier tube; DISC: discriminator

横向交变剪切干涉仪利用旋转光栅对入射波前实现两个正交方向的横向剪切，并对产生的干涉图形进行调制。阵列透镜对波前进行分割或采样，并将调制后的光强信号会聚到光电倍增管(PMT)的光阴极面上。32 通道光子计数器阵列实现弱光信号的高信噪比测量。每路光子计数系统都含有光子计数型光电倍增管(PMT)、低噪声前置放大器(PRE-AMP)、鉴别器(DISC)和计数器(COUNTER)。斜率处理器进行数字相敏检测，从检测到的光信号中提取 32 个子孔径的波前斜率信息。参考信号由参考光路和旋转光栅产生。在剪切干涉仪中，每个子孔径的光电倍增管接收到的调制光强基频信号为：

$$I(x, y, t) = I_0[1 + \gamma \sin(\omega t + \theta)] \tag{1}$$

式中 ω 为调制频率， γ 为调制光强信号的对比度， θ 为相位角。

在自适应光学系统中，将参考信号分为四段。假设 P 为一个采样周期 T 内探测到的光子数，于是可以得到^[5]：

$$P = \int_{-T/8}^{T/8} idt/e + \int_{T/8}^{3T/8} idt/e + \int_{3T/8}^{5T/8} idt/e + \int_{5T/8}^{7T/8} idt/e = A + B + C + D \tag{2}$$

式中 e 为电子电荷，将(1)式代入(2)式可以得到：

$$A = P[1/4 + (\sqrt{2}\gamma \sin \theta)/2\pi] \quad B = P[1/4 + (\sqrt{2}\gamma \cos \theta)/2\pi]$$

$$C = P[1/4 - (\sqrt{2Y} \sin \theta)/2\pi] \quad D = P[1/4 - (\sqrt{2Y} \cos \theta)/2\pi] \quad (3)$$

根据(3)式可以推出:

$$\operatorname{tg} \theta = (A - C)/(B - D) \quad \text{即: } \theta = \operatorname{arctg} [(A - C)/(B - D)] \quad (4)$$

如果 A 、 B 、 C 、 D 测量中带有噪声 ΔA 、 ΔB 、 ΔC 、 ΔD , 则相位角均方根误差为:

$$\begin{aligned} (\Delta\theta)^2 = & \left[\frac{B - D}{(A - C)^2 + (B - D)^2} \right]^2 [(\Delta A)^2 + (\Delta C)^2] \\ & + \left[\frac{A - C}{(A - C)^2 + (B - D)^2} \right]^2 [(\Delta B)^2 + (\Delta D)^2] \end{aligned} \quad (5)$$

由于波前探测器的主要噪声源是光子散粒噪声, 它服从泊松分布, 因此有:

$$(\Delta A)^2 + (\Delta C)^2 = A + C = P/2 \quad (\Delta B)^2 + (\Delta D)^2 = B + D = P/2 \quad (6)$$

将以上两代入(5)式可以得到波前相位角均方根误差为:

$$\sigma_\theta = \pi/2Y \sqrt{P} \quad (\text{rad}) \quad (7)$$

4 系统开环噪声

相位角 θ 与波前斜率 G 成正比, 且存在如下关系:

$$\theta = 2\pi l G / \lambda = 2\pi f_0 G / d_0 \quad (8)$$

式中 l 为波前剪切量, $l = \lambda f_0 / d_0$, λ 为探测光平均波长, d_0 为光栅周期, f_0 为会聚镜焦距。由(7)、(8)两式可以得到波前斜率的均方根误差为:

$$\sigma_G = (d_0 / 2\pi f_0) \sigma_\theta = 0.25 d_0 / (Y f_0 \sqrt{P}) \quad (\text{rad}) \quad (9)$$

波前相位均方误差 σ_w^2 与波前斜率均方误差 σ_G^2 之间存在如下关系^[6]:

$$\sigma_w^2 = E_p L^2 \sigma_G^2 \quad (10)$$

式中 E_p 为波前重构矩阵的误差传递系数, L 为子孔直径。将(9)式代入(10)式中可以推出系统开环波前相位均方根误差为:

$$\sigma_w = \sqrt{E_p L} \sigma_G = (0.25 d_0 L / Y f_0 \lambda) \sqrt{E_p / P} = (0.25 d_0 L / Y f_0 \lambda) \sqrt{(E_p / P_s T)} \quad (\lambda) \quad (11)$$

式中 P_s 为每个子孔径每秒钟所探测到的光子数即光子计数率, 且 $P_s = P / T$ 。

5 系统闭环噪声

系统闭环噪声均方差 σ_{fig}^2 与系统的噪声功率谱和噪声传递函数存在如下关系^[4]:

$$\sigma_{fig}^2 = \int_0^\infty F_{fn}(f) T_{fn}(f) df \quad (12)$$

式中为 $F_{fn}(f)$ 噪声功率谱, $T_{fn}(f)$ 为噪声传递函数。

5.1 噪声功率谱

此系统的主要噪声源是光子散粒噪声, 它是一种白噪声, 其功率谱可近似为一常数, 因此该系统的噪声功率谱可表示为:

$$F_{fn}(f) = \sigma_w^2 / B_{ni} \quad (13)$$

式中 σ_w 为系统开环波前相位均方根误差, B_{ni} 为等效噪声带宽。

此系统是一个二次采样过程，其传递函数为：

$$H(S) = (1 - e^{-ST})/ST \tag{14}$$

式中 T 为采样周期。根据等效带宽^[7]的定义可以推出其等效噪声带宽为：

$$B_{ni} = \frac{1}{H_0^2} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 df = \frac{1}{2T} \tag{15}$$

于是噪声功率谱可以由(11)、(13)式和(15)式求出：

$$F_{fn}(f) = d_0^2 L^2 E_p / 8Y^2 f_0^2 \lambda^2 P_s \quad (\lambda^2/\text{Hz}) \tag{16}$$

5.2 噪声传递函数

图 3 为自适应光学伺服控制系统方框图。此系统传递函数主要由三部分组成：

1) 波前探测、采样保持、波前复原。这是一个采样保持和延时环节，其传递函数为：

$$H_s(S) = [(1 - e^{-ST})/ST] e^{-ST} \tag{17}$$

式中 T 为采样周期。

2) 滤波和增益控制。在此系统中，采用一阶滞后滤波方式，其传递函数为：

$$H_a(S) = g/(1 + S\tau) \tag{18}$$

式中 g 为系统增益， τ 为滤波时间常数。

3) 变形镜和高压放大器。它可以看作一个滞后过程，其传递函数为：

$$H_m(S) = 1/(1 + S\tau_m) \tag{19}$$

式中 τ_m 为变形镜驱动器响应时间常数。因为 $\tau_m \ll T$ ，所以该项可忽略，表示为：

$$H_m(S) = 1 \tag{20}$$

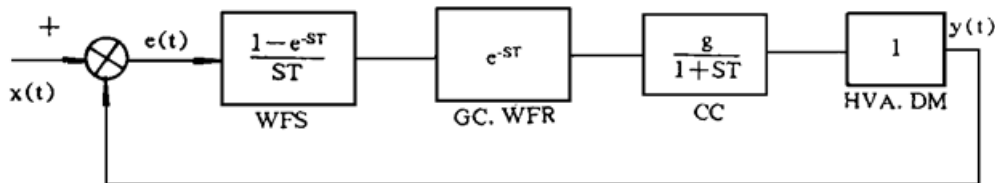


Fig. 3 Block diagram of servo control system

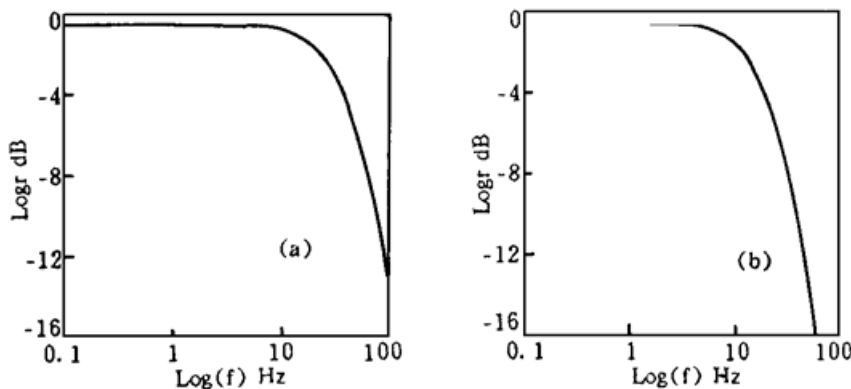


Fig. 4 Noise transfer function curve (a) sampling frequency $f_s = 500$ Hz; (b) $f_s = 250$ Hz

因此该系统的开环传递函数为：

$$H_o(S) = Y(S)/E(S) = H_s(S)H_a(S)H_m(S) = g(1 - e^{-ST})e^{-ST}/ST(1 + S\tau) \tag{21}$$

对于系统而言，系统的闭环传递函数决定噪声的引入，闭环传递函数为：

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{H_o(S)}{1 + H_o(S)} = \frac{g(1 - e^{-ST})e^{-ST}}{g(1 - e^{-ST})e^{-ST} + ST(1 + S\tau)} \tag{22}$$

图 4 是两种采样频率 f_s 时的闭环噪声传递函数曲线, 此图表明该系统对噪声而言是一个低通滤波器。

5.3 系统闭环噪声均方根误差

为分析方便, 可以将系统闭环传递函数写成:

$$H(jf) = 1/(1 + jf/f_{3dB}) \quad (23)$$

式中 f_{3dB} 是系统的闭环带宽。因此系统的噪声传递函数 $T_{fn}(f)$ 为:

$$T_{fn}(f) = |H(jf)|^2 = 1/[1 + (f/f_{3dB})^2] \quad (24)$$

于是系统的闭环噪声公式为:

$$\sigma_{fig}^2 = \int_0^\infty f_{fn}(f) T_{fn}(f) df = \frac{d_0^2 L^2 E_p}{8\gamma^2 f_0^2 \lambda^2 P_s} \int_0^\infty \frac{1}{1 + (f/f_{3dB})^2} df = \frac{\pi d_0^2 L^2 E_p f_{3dB}}{16\gamma^2 f_0^2 \lambda^2 P_s} \quad (\lambda^2) \quad (25)$$

因此系统闭环噪声的均方根误差为:

$$\sigma_{fig} = (d_0 L / 4\gamma f_0 \lambda) \sqrt{\pi E_p f_{3dB} / P_s} \quad (\lambda) \quad (26)$$

6 实验及结果

为了验证上述分析处理方法, 作者利用光电所建立的自适应光学系统在北京天文台 2.16 m 望远镜进行了实验。实验中测量 D/A 输出的噪声均方根电压值, 然后换算成相应的波前噪声均方根误差值。

图 5(a) 是系统开环波前相位噪声均方根误差随光子计数率的变化曲线。图中 f_s 表示采样频率, $f_s = 1/T$; $t = 0$ 表示系统开环。实线为实验拟合曲线, 虚线是根据(11)式进行数值计算所得到的理论曲线。从图中可以看出实验值与理论值比较符合。

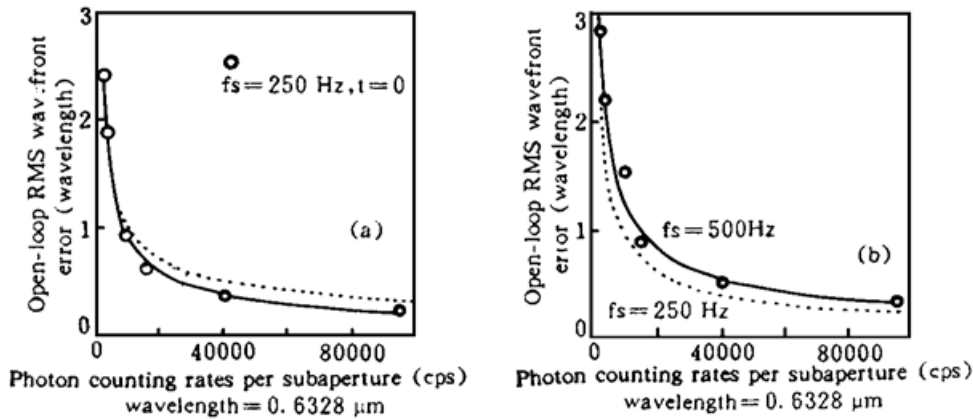


Fig. 5 Open loop RMS wavefront error versus photon counting rates persubaperture ($d_0 = 0.4$ mm, $L = 10$ mm, $\gamma = 0.8$, $f_0 = 250$ mm, $E_p = 0.64$, $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$)

图 5(b) 是不同采样频率情况下, 系统开环波前噪声均方根误差随光子计数率的变化曲线。图中实线为采样频率 $f_s = 500$ Hz 时的实验拟合曲线; 虚线为采样频率 $f_s = 250$ Hz 时对应的实验拟合曲线。此图说明系统采样频率越大, 噪声也越大。

图 6(a) 是在闭环带宽 $BW = 15$ Hz (即 $f_{3dB} = 15$ Hz) 时系统闭环波前相位噪声均方根误差随光子计数率的变化曲线。图中实线为实验拟合曲线, 虚线是根据(26)式数值计算得到的理论曲线。从图中可以看出实验值与理论值比较符合。

图 6(b) 是不同带宽情况下, 系统闭环波前相位噪声均方根误差随光子计数率的变化曲线。图中实线为闭环带宽 $BW = 30$ Hz (即 $f_{3dB} = 30$ Hz) 时所测得的数据对应的实验拟合曲线; 虚线为闭环带宽 $BW = 15$ Hz (即 $f_{3dB} = 15$ Hz) 时所测得的数据对应的实验拟合曲线。此图说明系统带宽越大, 噪声越严重。

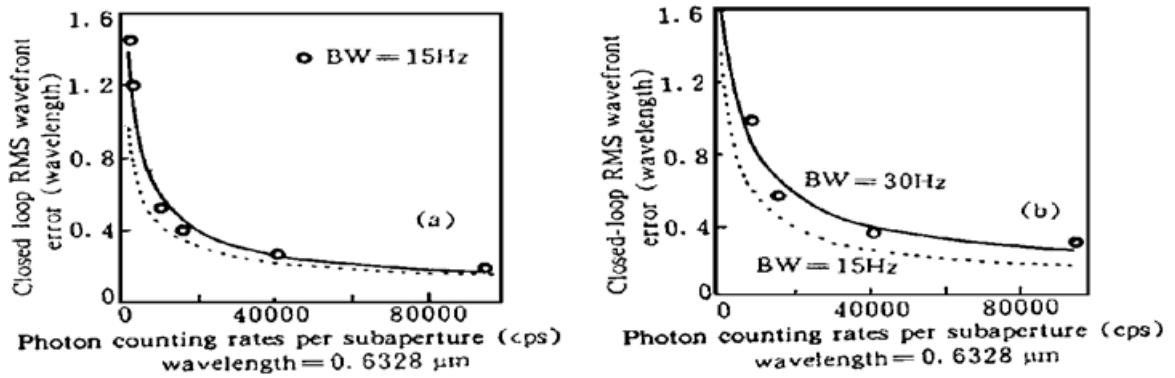


Fig. 6 Closed-loop RMS wavefront error versus photon counting rates persubaperture
($d_0 = 0.4\text{mm}$, $L = 10\text{mm}$, $\gamma = 0.8$, $f_0 = 250\text{mm}$, $E_p = 0.64$, $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$)

结 论 自适应光学系统是一个闭环控制系统,其噪声主要从波前探测器引入,在本系统中主要噪声源是光子散粒噪声;波前探测器噪声属于白噪声,系统对噪声而言是一个低通滤波器;随着光强的增加或系统带宽的减小,系统的噪声逐渐减小。

本工作得到汤国茂、邱杰等同志的帮助,在此致以衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] 姜文汉, 动态波前误差的自适应光学实时校正. 光学学报, 1988, 6(5): 441~ 447
- [2] Wenhan Jiang, Mingquan Li, Guomao Tang *et al.*, Adaptive optics image compensation experiments for star objects. *Opt. Engng.*, 1995, 34(1): 15~ 20
- [3] 姜文汉, 严佩英, 李明全等 自适应光学实时大气湍流补偿实验. 光学学报, 1990, 10(6): 558~ 564
- [4] R. R. Parenti, R. J. Sasiela, Laser-guide-star systems for astronomical applications. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1994, 11(1): 288~ 309
- [5] J. C. Wyant, Use of an heterodyne lateral shear interferometer with real-time wavefront correction systems. *Applied Optics*, 1975, 14(11): 2622~ 2626
- [6] J. Herrmann, Least-square wave front errors of minimum norm. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, 70(1): 28~ 35
- [7] 南京大学信息物理系, 弱信号检测技术, 北京, 高等教育出版社, 1991, 1~ 11

Noise Analysis of an Adaptive Optics System Using Photon Counting Shearing Interferometer as Wavefront Sensor

Rao Changhui Jiang Wenhan Li Mingquan

(Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)

(Received 7 September 1995; revised 27 November 1995)

Abstract The noise of wavefront sensor is a major noise source in adaptive optics system. Based on the infrared adaptive optics system at 2.16 m telescope, the photon counting noise of wavefront sensor which is photon counting shearing interferometer, and error propagation in the course of close loop are analysed in terms with servo control system. The noise power spectra, servo transfer function, the open-loop and closed-loop RMS noise error are deduced theoretically. The experimental results are presented.

Key words adaptive optics, wavefront sensor, shearing interferometer, photon counting, shot noise.