

短脉冲高斯光束的时空形式

王中阳 张正泉 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 考虑到腔模光腰尺寸的频率依赖性, 得到了一短脉冲高斯光束在自由空间传播的时域解析形式, 发现其可由一复时间变量来描述。复时间变量的实部给出了脉冲的传输时间, 其与波前曲率有关, 虚部给出了空间量值, 两者的交叉项称为时空耦合。并对傅里叶变换极限脉冲和啁啾脉冲的时空形式作了分析。

关键词 超短脉冲, 光束, 时空耦合。

1 引 言

短脉冲激光技术与应用的发展, 迫切需要人们了解脉冲光束的传输与变换特性。最近, 人们相继提出了时间成像、时间透镜的概念^[1], 并将 ABCD 定律推广到时域(色散 ABCD 矩阵)^[2]。以 3×3 或 4×4 阶矩阵方法来描述脉冲通过对称光学系统的时空变换^[3~5], 进一步以 6×6 阶矩阵方法来描述非对称系统^[6]。但至今未能很好地揭示出脉冲光束传输中的时空相关性。Ziolkowski 和 Judkins 首先对飞秒脉冲高斯光束的时空形式作了研究^[7], 但没考虑到在激光腔内振荡的每一模其光腰尺寸的频率依赖性, 从而未能得出解析形式。本文从分析短脉冲激光腔的模式结构入手, 得出了短脉冲高斯光束在自由空间的明确形式, 并分析了傅里叶变换极限脉冲和啁啾脉冲的时空特性。

2 短脉冲高斯光束的时空形式

对于短脉冲激光腔, 为了更好地锁定纵模, 总选择基横模振荡。此时纵向驻波频率即为腔模的谐振频率。对于共焦腔, 每一振荡模的光腰尺寸 W_0 依赖于模的谐振频率

$$W_0 = \sqrt{Lc/\omega_q} \quad (1)$$

其中 L 为腔长, ω_q 为第 q 个纵模的谐振频率。每一纵模(横向为 TEM₀₀模)在腔内的传输为高斯光束, 考虑到光腰的频率依赖性, 把高斯光束的光束参数改写成以下形式

$$W_0^2 = (\omega_0/\omega_q)(Lc/\omega_0) = (\omega_0/\omega_q)\sigma_0^2, \quad \mathcal{Q}(z) = \tan^{-1}(z/z_0), \quad z_0 = \pi W_0^2/\lambda_q = \pi\sigma_0^2/\lambda_0, \\ W^2(z) = (\omega_0/\omega_q)\sigma_0^2[1 + (z/z_0)^2] = (\omega_0/\omega_q)\sigma^2(z), \quad R(z) = z[1 + (z_0/z)^2]. \quad (2)$$

式中 ω_0 、 λ_0 分别为中心谐振频率和中心波长。注意到 σ_0 、 $\sigma(z)$ 、 $R(z)$ 、 $\mathcal{Q}(z)$ 和 z_0 不依赖于各个纵模谐振频率, 仅为中心频率处的光束参数。为了得到短脉冲输出, 必须锁定尽可能多的纵模, 通常其锁定的纵模数在 10^3 量级以上。这样, 可以把分立的纵模结构看成为连续, 脉冲的谱分布看成为纵模包络。因而自由空间中短脉冲高斯光束在频域可写为如下形式

$$U(r, z, \omega) = E(\omega) [\sigma_0/\sigma(z)] \exp \{-i[kz + \mathcal{Q}(z)] - ikr^2/2q(z)\}, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} 1/q(z) &= 1/R(z) - i\lambda_0/\pi\sigma^2(z), & \sigma^2(z) &= \sigma_0^2[1 + (z/z_0)^2], \\ R(z) &= z[1 + (z_0/2)^2], & \mathcal{Q}(z) &= \tan^{-1}(z/z_0), & z_0 &= \pi\sigma_0^2/\lambda_0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$E(\omega)$ 为短脉冲的谱振幅, 其由激光介质的增益和色散特性及腔的损耗决定。通常 $E(\omega)$ 可表示为 $\omega - \omega_0$ 的函数, 即 $E(\omega) = E(\omega - \omega_0)$ 。

对(3)式进行傅里叶变换, 即可求得短脉冲高斯光束的时空形式

$$U(r, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int U(r, z, \omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (5)$$

引入一复时间变量 $\tau(r, z, t) = t - r^2/2cq(z) - z/c$, 易解得(5)式为

$$U(r, z, t) = [\sigma_0/\sigma(z)] E(\tau) \exp\{i[\omega_0\tau - \mathcal{Q}(z)]\}, \quad (6)$$

其中 $E(\tau)$ 为 $E(\omega - \omega_0)$ 的逆傅里叶变换。从上式看出, 短脉冲高斯光束可看成为一个具有表观频率 ω_0 并随着复时间 τ 变化的波包, 复时间变量包含了时间和空间的所有信息。

3 一类高斯型的傅里叶变换极限脉冲光束的时空行为

假设一短脉冲的谱分布为高斯型, 即

$$E(\omega) = (A_0/\delta_0) \exp[-(\omega - \omega_0)^2/2\delta_0^2], \quad (7)$$

其中 δ_0 为脉冲谱 $1/e$ 带宽。可知其时间分布亦为高斯型

$$E(t) = A_0 \exp[-t^2/2t_0^2] \exp(i\omega_0 t), \quad (8)$$

其中 $t_0 = 1/\delta_0$ 为脉冲半宽。具有这种形式的脉冲称为傅里叶变换极限的, 不含非线性项。由(6)式可知, 此种时间信号的脉冲高斯光束, 其时空形式只要将(8)式的时间 t 以复时间 τ 来代替, 展开可得

$$\begin{aligned} U(r, z, t) &= A_0 \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \exp\left[-\left(t - \frac{r^2}{2cR(z)} - \frac{z}{c}\right)^2/2t_0^2\right] \exp\left[-\frac{r^2}{\sigma^2(z)} + \frac{r^4}{2\sigma^4(z)}\left(\frac{1}{t_0\omega_0}\right)^2\right] \\ &\times \exp\{i\omega_0[1 - \frac{r^2}{\sigma^2(z)}\left(\frac{1}{t_0\omega_0}\right)^2][t - \frac{r^2}{2cR(z)} - \frac{z}{c}] + i\mathcal{Q}(z)\}, \end{aligned} \quad (9)$$

从(9)式可看出, 脉冲光束在传输过程中时空是密切相关的, 不仅表现在时间分布上与波前曲率有关, 亦表现在空间分布上与脉宽有关。同样在相位项里亦存在时空耦合, 此时的表观频率与空间分布有关。由此可知, 脉冲光束的传输时间应定义为

$$t_p = \frac{z}{c} + \frac{r^2}{2cR(z)}, \quad (10)$$

其不仅与轴向传输距离 z 有关, 且与波前曲率相关。使得脉冲从近场传输到远场时, 脉冲波形发生扭曲, 此种扭曲来源于不同的傍轴点光程的差异(如图(1))。这与文献[7]采用数值解法得出的结果相似。

空间分布中的时空耦合导致时域空间尺寸的增大。可求得其时域光腰为

$$\sigma_t = \sigma_0^2(t_0\omega_0)^2 \left[1 - \sqrt{1 - 2\left(\frac{1}{t_0\omega_0}\right)^2}\right], \quad (11)$$

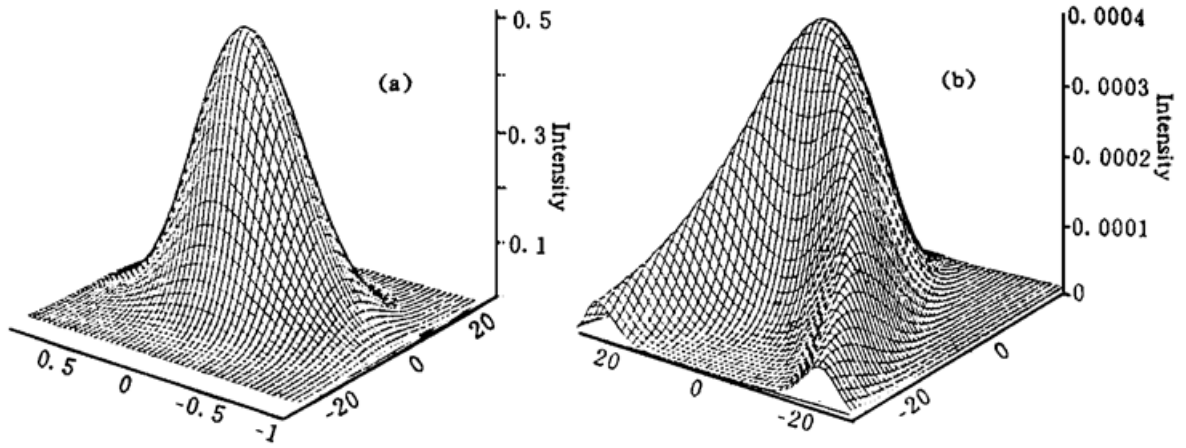


Fig. 1 The shape of pulsed beam observed in the planes: (a) $z = z_0$, (b) $z = 50z_0$. Here, r is the distance from the optical axis, t is the relative time. In this case: $\sigma_0 = 0.5$ mm, $t_0 = 10$ fs

与脉冲的宽度有关。当 $1/t_0\omega \ll 1$ 时，时空耦合可忽略。一般对于中心调谐波长在 1064 nm 的激光脉冲，其半宽超过 10 fs，就可忽略时空耦合。

在脉冲传输中，由于横向空间分布的扭曲，使得强度分布在不断变化，横向的脉冲峰值位置越来越不一致。为此追随轴上脉冲峰值所在的横截面光强的变化，来考察脉冲光强传输中的轮廓。可得

$$I(r, z) = A_0^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2(z)} \exp \left[-\frac{2r^2}{\sigma^2(z)} + \left(\frac{r^4}{\sigma^4(z)} - \frac{k_0^2 r^4}{4R^2(z)} \right) \left(\frac{1}{t_0\omega} \right)^2 \right], \quad (12)$$

从(12)式可看出，其时空耦合分为二部分，一部分来源于波前曲率，另一部分与光斑尺寸 $\sigma(z)$ 有关。两者相互抵消，在瑞利距离 z_0 位置两者平衡，此时时域光斑尺寸为 $\sigma(z)$ 。此后前

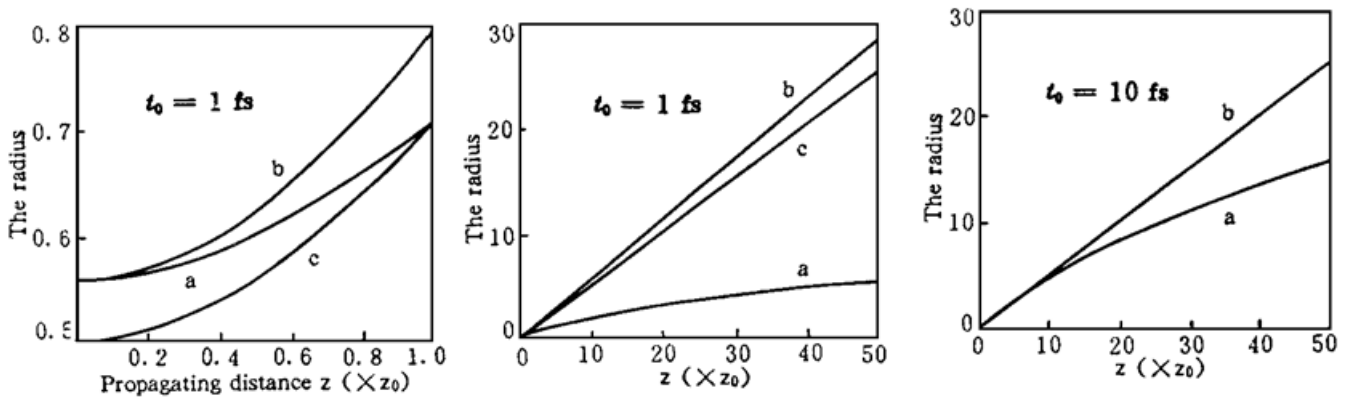


Fig. 2 Illustrate the peak intensity a and energy b profile comparing with $\sigma(z)$ c versus the propagating distance z

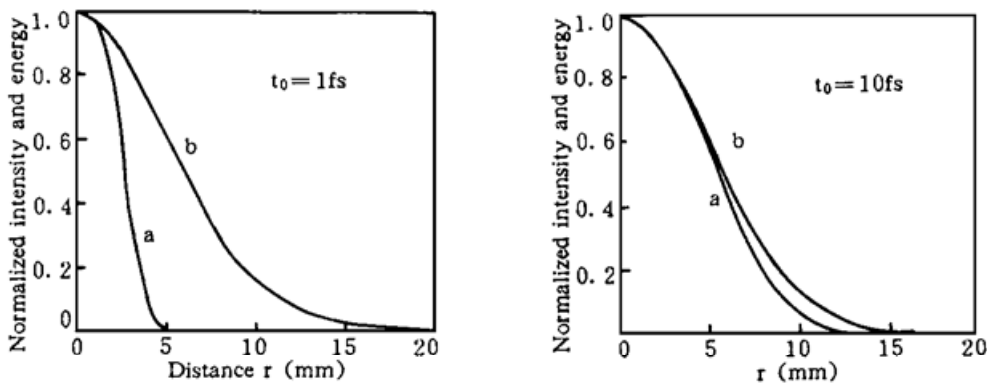


Fig. 3 Illustrate the peak intensity a and energy b distribution, here the propagating distance is located at $20z_0$

者大于后者, 使得峰值光斑尺寸越来越小于 $\sigma(z)$, 如图(2)所示。而脉冲光束能量分布半宽与(11)式有相同形式。当 $1/t_0\omega \ll 1$ 时, 能量空间分布半宽值等于 $\sigma(z)$ 。因此在脉冲光束的传输过程中, 峰值强度的轮廓越来越小于能量分布的轮廓, 如图(2)、(3)所示。

另外从(9)式看到, 脉冲光束的表观频率为

$$\omega' = \omega [1 - (r^2/\sigma^2(z))(1/t_0\omega)^2], \quad (13)$$

时空耦合引起傍轴脉冲表观频率的减小, 使相位有一微小的修正。

4 啁啾脉冲光束的时空形式

含有线性啁啾的脉冲可表示为

$$E_c(t) = A(t) \exp \{i[\omega t + \frac{S}{2}t^2]\}, \quad (14)$$

假设 $A(t)$ 具有(8)式的高斯型, 由(7)式可知, 对上式用复时间变量 τ 代替 t , 同样可得啁啾脉冲高斯光束的时空表式

$$\begin{aligned} U_c(r, z, t) = & A_0 \frac{\sigma_0}{\sigma(z)} \exp \left[- \left(t' - T \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \right)^2 / 2T^2 \right] \\ & \times \exp \left\{ - \frac{r^2}{\sigma^2(z)} + \frac{r^4}{2\sigma^4(z)} \left[\left(\frac{1}{T\omega} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^2 \right] \right\} \\ & \times \exp \left\{ i\omega \left[1 - \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \left(\frac{1}{T\omega} \right)^2 \right] t' + i \frac{S}{2} t'^2 - i \frac{S}{2\omega^2} \frac{r^4}{\sigma^4(z)} + i\mathcal{Q}(z) \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$t' = t - \frac{r^2}{2cR(z)} - \frac{z}{c}, \quad (16)$$

式中 T 为啁啾脉冲的 $1/e$ 带宽, $\Delta\omega = TS$ 为线性啁啾覆盖的频谱范围, 一般 $\Delta\omega \leq \delta$ 。由上式看出, 啁啾信号引入新的时空耦合。首先表现在时间分布上引入一与啁啾有关的延迟, 为

$$\Delta T = T \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \leq T \frac{\delta}{\omega} \frac{r^2}{\sigma^2(z)} = \frac{N}{\omega} \frac{r^2}{\sigma^2(z)}, \quad (17)$$

式中 δ 为啁啾脉冲的 $1/e$ 谱带宽, $N = \delta T$ 为脉冲的时间-带宽积。对于较大的时间-带宽积, 引起的傍轴点延迟在飞秒量级, 如图(4)所示。另外在空间分布上也引入一与啁啾有关的时空耦合项, 使得时域空间尺寸进一步增大。同样其时域光腰尺寸可求得

$$\sigma_{ic} = \sigma_0^2 \frac{(T\omega)^2}{1 + (T\Delta\omega)^2} \left[1 - \sqrt{1 - 2 \left(\frac{1 + (T\Delta\omega)^2}{(T\omega)^2} \right)} \right], \quad (18)$$

若假设 $\Delta\omega \approx \delta$, 则上式为

$$\sigma_{ic} = \sigma_0^2 \frac{(T\omega)^2}{1 + N^2} \left[1 - \sqrt{1 - 2 \left(\frac{1 + N^2}{(T\omega)^2} \right)} \right], \quad (19)$$

从(19)式看出, 脉冲中的啁啾成分同样引起时空耦合, 其大小取决于脉宽和脉冲的时间-带宽积。

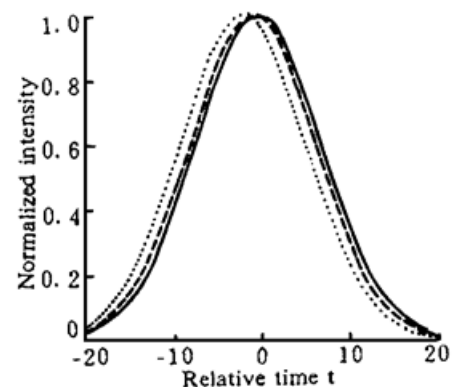


Fig. 4 Illustrate the pulse shape ($T = 10$ fs) with different time-bandwidth product: (a) $N = 1$ (solid line), (b) $N = 2.5$ (dashed line), (c) $N = 5.0$ (dotted line). here the distance from the axis is located at $\sigma(z)$

结 论 从上考虑到腔模光腰尺寸的频率依赖性, 本文给出了短脉冲高斯光束在时域的解析形式, 发现其可由一复时间变量来描述。复时间变量包含了脉冲光束空间和时间的所有信息。脉冲光束的时空耦合由二部分组成: 一部分与波前曲率相关, 使得脉冲空间波形随着波前曲率弯曲; 另一部分与频域中心频率处的光斑尺寸有关, 使得时域光斑尺寸的增大和傍轴表观频率的减小, 而且对于包含啁啾的脉冲, 啁啾还会使空间波形发生一定的弯曲, 但这部分时空耦合一般情况下可忽略。

参 考 文 献

- [1] B. H. Kolner, M. Nazarathy, Temporal imaging with a time lens. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(12) : 630~632
- [2] S. P. Dijaili, A. Dienes, J. S. Smith, ABCD Matrices for dispersive pulse propagation. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1990, **QE-26**(6) : 1158~ 1164
- [3] O. E. Martinez, Matrix formalism for pulse compressors. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1988, **QE-24**(12) : 2530~ 2536
- [4] O. E. Martinez, Martrix formalism for dispersive laser cavities. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1989, **QE-25**(3) : 296~ 300
- [5] A. G. Kostenbauder, Ray-pulse Matrices: A relational treatment for dispersive optical systems. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1990, **QE-26**(6) : 1148~ 1157
- [6] Q. Lin, S. Wang, J. Alda *et al.*, Spatial-temporal coupling in grating-pair pulse compression system analysed by matrix optics. *Opt. & Quant. Electron.*, 1995, **27**(7) : 679~ 692
- [7] R. W. Ziolkowski, J. P. Judkins, Propagation characteristic of ultrawide-bandwidth pulsed Gaussian beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1992, **9**(11) : 2021~ 2030

Space-Time Characteristic of Ultrashort Pulsed Gaussian Beam

Wang Zhongyang Zhang Zhengquan Xu Zhizhan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 6 February 1996; revised 2 May 1996)

Abstract Considering the frequency dependence of waist size on the cavity modes, an analytical form of the ultrashort pulsed Gaussian beam is derived by using a complex temporal variable, which contains all the information about the spatial and temporal properties of the pulsed beam. The real part of the complex time gives the pulse traveling time, which is related to the wavefront. The imaginary part gives the information of spatial distribution and the crossed part gives the coupling between space and time on propagation of the pulse. Then the space-time characteristics of a transform limited Gaussian pulse and a Gaussian pulse with linear chirp are analyzed.

Key words ultrashort pulse, beam, space-time coupling.