

# 对相干态与级联三能级原子相互作用过程中 原子与场的动力学特性

赖云忠 汤洪明 容幸福

(太原重型机械学院基础部, 太原 030024)

**摘 要** 研究对相干态与级联三能原子相互作用的动力学特性。结果表明, 无论场模与原子的中间能级是否失谐, 拉比振荡和互关联函数的时间演化都呈现崩溃与回复现象, 但崩溃的持续时间随失谐量的增加而迅速延长, 且两模之间随时间的演化既出现关联也出现反关联。

**关键词** 对相干态, 级联三能级原子, 动力学特性。

## 1 引 言

由于关联的双模场常常表现出一系列非经典光场的特征, 如压缩、光子反聚束、亚泊松分布及违背 Cauchy-Schwartz 不等式等, 使得对关联的双模光场的量子统计性质及其与原子体系相互作用的研究引起了人们的关注<sup>[1-7]</sup>。不久前, Lee 和 Agarwal 研究了对相干态的量子统计特性<sup>[2-4]</sup>。由于其两个模的光子数之差  $q$  为定值, 因而两模之间有很强的关联。文献[6]中讨论了对相干态与两个原子的相互作用过程中原子与场的动力学特性, 发现原子的拉比振荡呈现出崩溃与回复现象, 回复时间随  $q$  增加而减小。光场的两模之间呈现非经典相关效应。

本文将研究对相干态场与中间能级失谐的级联三能级原子系统中原子和场的动力学特性, 具体分析了对相干态参量和失谐量对原子的拉比振荡的崩溃与回复现象的影响及场的互关联函数随时间的演化规律。发现了一些新的特征。

## 2 描述系统的态函数

考虑如图 1 所示的级联三能级原子模型, 其中  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  及  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  之间的单光子跃迁分别与频率为  $\nu_1$  和  $\nu_2$  的光场相联系。 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  之间的跃迁是电偶极禁戒的。在旋波近似下, 原子与场的相互作用哈密顿量可表示为<sup>[5,8]</sup>。

$$H_I = \Delta R_{11} + g_1(a_1^\dagger R_{01} + R_{10}a_1) + g_2(a_2^\dagger R_{12} + R_{21}a_2) \quad (1)$$

式中  $R_{ij} = |i\rangle\langle j|$ ,  $|i\rangle$  ( $i = 0, 1, 2$ ) 是原子对应于频率为  $\omega$  的本征态;  $a_i$  和  $a_i^\dagger$  分别是频率为  $\nu_i$  的场的湮没和产生算符;  $g_i$  是耦合常数, 本文取为实数;  $\Delta$  为场模与原子中间  $1$  能级的失谐量。

设  $t = 0$  时, 原子处在激发态  $|2\rangle$ , 而光场处于对相干态<sup>[2-4]</sup>

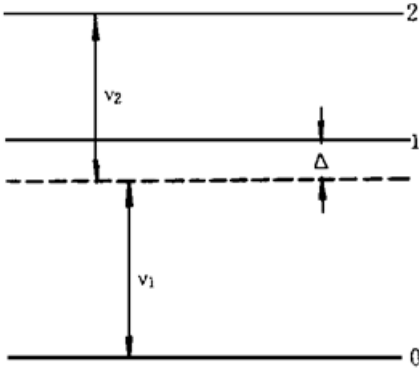
$$|\zeta, q\rangle = \left[ \frac{|\zeta|^q}{I_q(2|\zeta|)} \right]^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}} |n+q, n\rangle \quad (2)$$

式中  $q$  为两模之间的光子数之差,  $I_q$  为虚宗量贝塞耳函数。随时间的演化, 在相互作用表象中, 系统在  $t > 0$  时刻的态矢可表示为

$$|\psi_I(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n [B_2(n, t) |2, n+q, n\rangle + B_1(n, t) |1, n+q, n+1\rangle + B_0(n, t) |0, n+q+1, n+1\rangle] \quad (3)$$

其中

$$F_n = \left[ \frac{|\zeta|^q}{I_q(2|\zeta|)} \right]^{1/2} \frac{\zeta^n}{[n!(n+q)!]^{1/2}} \quad (4)$$



利用相互作用表象中的薛定谔方程及初始条件

$$B_0(n, 0) = B_1(n, 0) = 0, B_2(n, 0) = 1 \quad (5)$$

可得

$$B_0(n, t) = \frac{\Omega_{1n}\Omega_{2n}}{\Omega_{3n}^2} [(\cos\beta nt + i \frac{\delta}{\beta_n} \sin\beta nt) \exp(-i\delta t) - 1],$$

$$B_1(n, t) = -i \frac{\Omega_{2n}}{\beta_n} \sin\beta nt \exp(-i\delta t), \quad (6)$$

$$B_2(n, t) = \frac{\Omega_{1n}^2}{\Omega_{3n}^2} + \frac{\Omega_{2n}^2}{\Omega_{3n}^2} (\cos\beta nt + i \frac{\delta}{\beta_n} \sin\beta nt) \exp(-i\delta t)$$

Fig. 1 The interaction of pair coherent state with a three-level cascade atom

式中  $\Omega_{1n} = g_1 \sqrt{n+q+1}, \Omega_{2n} = g_2 \sqrt{n+1}, \Omega_{3n} = \sqrt{\Omega_{1n}^2 + \Omega_{2n}^2}, \delta = \Delta/2, \beta_n = \sqrt{\delta^2 + \Omega_{3n}^2}.$

这样就确定了系统在相互作用表象中的态矢量, 由此可对系统中原子和场的动力学特性进行全面研究。以下均取  $g_1 = g_2 = 1$ 。

### 3 原子的崩溃与回复

由上节得到的态矢量  $|\psi_I(t)\rangle$ , 可得原子处在第  $i$  个能级的几率为

$$P_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |F_n|^2 |B_i(n, t)|^2, (i = 0, 1, 2) \quad (7)$$

将(6)式代入(7)式立即得到原子处在各能级的几率与时间的关系:

$$P_0(t) = 1 - P_1(t) - P_2(t),$$

$$P_1(t) = \frac{|\zeta|^q}{I_q(2|\zeta|)} \sum_n \frac{|\zeta|^{2n}}{n!(n+q)!} \frac{\Omega_{2n}^2}{\beta_n^2} \sin^2\beta nt, \quad (8)$$

$$P_2(t) = \frac{|\zeta|^q}{I_q(2|\zeta|)} \sum_n \frac{|\zeta|^{2n}}{n!(n+q)!} \left| \frac{\Omega_{1n}^2}{\Omega_{3n}^2} + \frac{\Omega_{2n}^2}{\Omega_{3n}^2} (\cos\beta nt + i \frac{\delta}{\beta_n} \sin\beta nt) \exp(-i\delta t) \right|^2$$

当  $|\zeta| \neq 0$  时, (8)式的数值计算结果如图 2 和图 3 所示。

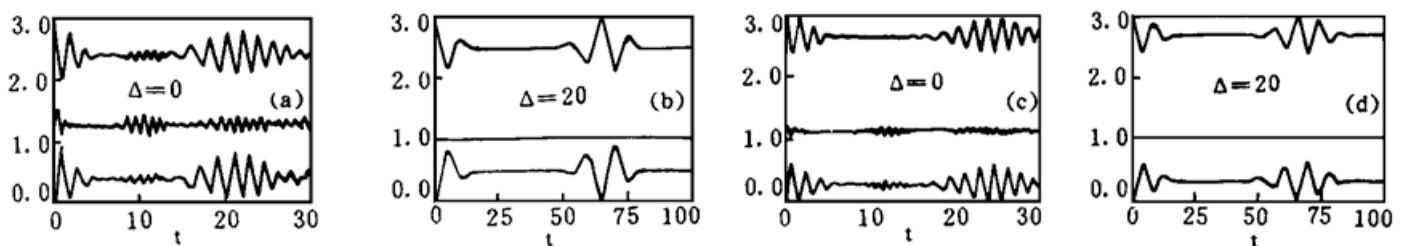


Fig. 2 Time evolution of  $P_0, P_1 + 1$  and  $P_2 + 2$ .  $\zeta = 5$ . (a) and (b)  $q = 0$ , (c) and (d)  $q = 4$

图中可见, 原子的拉比振荡显示出崩溃与回复。 $\Delta$  和  $|\varphi\rangle$  一定时, 增大  $q$ , 崩溃持续时间缩短, 但随  $\Delta$  增加无明显变化。这说明增大  $q$  将增加原子和双模光场的能量交换<sup>[6]</sup>, 但随  $\Delta$  增加而相对减弱。 $q$  和  $\Delta$  一定, 比较图 2(d) 的图 3(a) 可见, 增加  $|\varphi\rangle$  使崩溃持续时间延长。产生上述结果的原因是对相干态的光子数分布随  $q$  增加而变窄, 峰位向小  $n$  方向移动, 而随  $|\varphi\rangle$  增加, 峰位则向大  $n$  方向移动<sup>[3,6]</sup>。当  $|\varphi\rangle$  和  $q$  一定, 由图 2 和图 3 可知, 随  $\Delta$  增加, 崩溃时间显著延长。使用文献[5] 中的方法, 可得在大  $\Delta$  极限下, 拉比振荡的回复时间  $t_r$  为

$$t_r = \frac{2\pi k \Delta}{g_1^2 + g_2^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

$g_1 = g_2 = 1$  时,  $t_r = k\pi\Delta$ , 显然与图 2(b) 和图 2(d) 及图 3 一致。当失谐量  $\Delta$  很大时, 如图 2(b) 和图 2(d) 及图 3 所示,  $P_1(t) \rightarrow 0$  而  $P_0(t)$  和  $P_2(t)$  呈现与双光子 Jaynes-Cummings 模型类似的振荡特性<sup>[9]</sup>, 此结果也可由(6) 式和(7) 式直接得到。为此定义小参数  $\epsilon$ <sup>[5]</sup>

$$\epsilon = \Omega_{3n}/\Delta \quad (10)$$

在第  $(n+q, n)$  簇中原子的占居几率可表示为<sup>[5]</sup>

$$P_i(n, t) = |B_i(n, t)|^2, \quad i = 0, 1, 2 \quad (11)$$

把(6) 式代入(11) 式并将其振幅按  $\epsilon$  展开, 保留第一项, 得

$$\begin{aligned} P_2(n, t) &\approx 1 - \frac{4\Omega_{1n}^2\Omega_{2n}^2}{\Omega_{3n}^2} \sin^2 \frac{\Omega_{3n}}{2\Delta} t, \\ P_1(n, t) &\approx 0, \\ P_0(n, t) &\approx \frac{4\Omega_{1n}^2\Omega_{2n}^2}{\Omega_{3n}^2} \sin^2 \frac{\Omega_{3n}}{2\Delta} t \end{aligned} \quad (12)$$

显然在失谐量很大时, 原子中间能级的占居几率趋于零因而可绝热消除, 因此(12) 式可改写为

$$P_+(n, t) = 1 - \frac{K_n^2}{\tilde{K}_n^2} \sin^2 \tilde{K}_n t, \quad P_-(n, t) = \frac{K_n^2}{\tilde{K}_n^2} \sin^2 \tilde{K}_n t \quad (13)$$

式中  $K_n$  和  $\tilde{K}_n$  分别为有效和广义拉比振荡频率, 定义为

$$\begin{aligned} K_n &= \Omega_{1n}\Omega_{2n}/\Delta = K \sqrt{(n+1)(n+q+1)}, \\ \tilde{K}_n &= \Omega_{3n}^2/2\Delta = \sqrt{K_n^2 + \tilde{\Delta}_n^2/4} \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $K = g_1g_2/\Delta$ ,  $\tilde{\Delta}_n = (\Omega_{1n}^2 - \Omega_{2n}^2)/\Delta$  分别为有效耦合常数和有效失谐量。容易看出(13) 式即为具有+ 和- 两个能级的两能级系统的解<sup>[5]</sup>。由此可见, 在失谐量  $\Delta$  很大时, 可以通过绝热消去原子的中间能级  $|1\rangle$ , 将系统等效为一个与双模光场发生非简并双光子相互作用的两能级原子系统<sup>[10]</sup>, 因而图 2(b) 和图 2(d) 及图 3 中,  $P_0$  和  $P_2$  呈现与双光子 Jaynes-Cummings 模型类似的振荡特性<sup>[9]</sup>。

## 4 场的量子统计性质

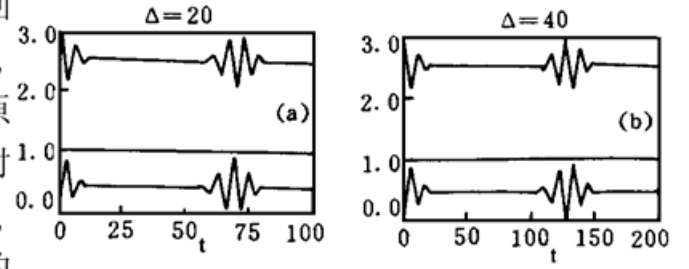


Fig. 3 Time evolutions of  $P_0, P_1 + 1$  and  $P_2 + 2$ ,  $\zeta = 10, q = 4$

光场的非经典特性是量子光学研究的重要课题之一。对相干态场具有一系列非经典特性。本文着重讨论场的互关联函数。双模互关联函数定义为

$$g_{12}^{(2)}(t) = \frac{\langle \hat{a}_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle}{\langle \hat{a}_1^\dagger a_1 \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger a_2 \rangle} \quad (15)$$

利用(3)式和(6)式可求出上式的平均值。如果  $g_{12}^{(2)} > 1$ , 称两模之间是关联的,  $g_{12}^{(2)} < 1$ , 则说是反关联的。对(15)式所作的数值计算结果如图4和图5所示。从图中可见, 级联三能级原子同对相干态场相互作用时, 不仅两模之间有反关联存在, 且  $g_{12}^{(2)}(t)$  的长时间行为表现出类似于原子拉比振荡的崩溃与回复现象, 发现  $g_{12}^{(2)}$  的崩溃与回复和拉比振荡的崩溃与回复在时间上是一致的, 这说明二者之间是密切相关的。在  $g_{12}^{(2)}$  的崩溃阶段, 两模之间总是关联的, 但关联程度比初始时刻要弱得多, 而只有在回复阶段, 两模之间才出现反关联。这与另一类关联双模场  $SU(1, 1)$  相干态场与两能级和  $V$  及  $\Lambda$  型三能级原子相互作用过程中光场的关联特性完全不同<sup>[5,7]</sup>。后者两模之间始终是关联的。由图4和图5可见,  $|\mathcal{D}|$  和  $q$  一定时, 随  $\Delta$  增加反关联程度减弱, 崩溃时间显著延长但崩溃阶段的关联程度随  $\Delta$  增加没有显著变化;  $\Delta$  和  $|\mathcal{D}|$  一定时, 随  $q$  增加, 崩溃时间缩短, 且曲线向上移即关联程度增加而反关联程度减弱;  $\Delta$  和  $q$  一定时, 比较图4(d)和图5(a)可知, 随  $|\mathcal{D}|$  增加, 反关联程度增强, 崩溃阶段的关联程度则减弱, 但  $\Delta$  较大时崩溃持续时间没有显著变化。

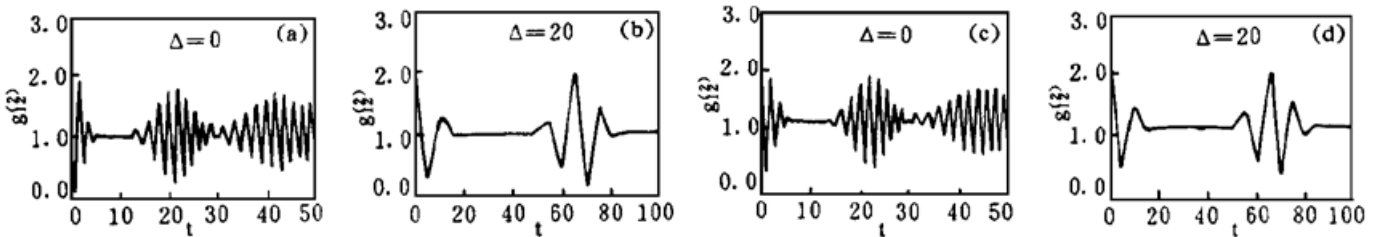


Fig. 4 Time evolution of  $g_{12}^{(2)}$ ,  $\xi = 5$ . (a) and (b)  $q = 0$ , (c) and (d)  $q = 4$

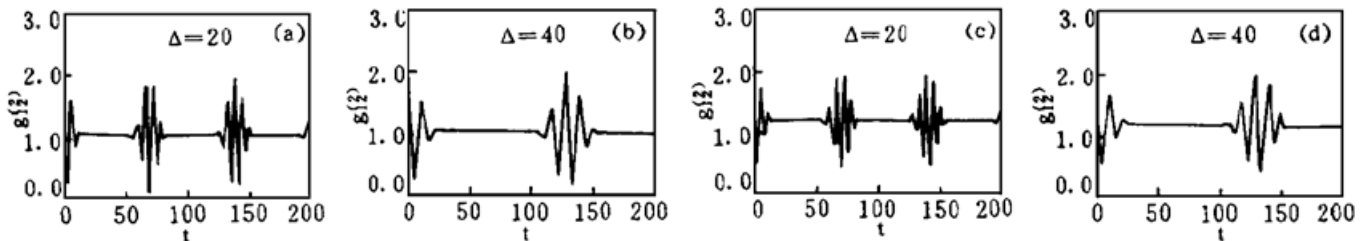


Fig. 5 Time evolution of  $g_{12}^{(2)}$ ,  $\zeta = 10$ . (a) and (b)  $q = 4$ , (c) and (d)  $q = 10$

**结 论** 本文研究了初始光场为对相干态时, 双模腔场-级联三能级原子系统中原子和场的动力学特性。结果表明, 光场有规律地呈现关联和反关联特性并存在关联函数振荡的崩溃与回复现象。在原子振荡的崩溃区域, 两模之间呈现弱关联, 而回复振荡区域, 两模的关联函数显示出较强的振荡并交替出现关联和反关联特性。这说明原子与场的耦合演化对场的动力学特性有较大的影响且失谐量  $\Delta$  的大小对其影响最明显。

### 参 考 文 献

- [1] S. M. Barnett, P. L. Knight, Squeezing in correlated quantum systems. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6/7): 841~ 853
- [2] C. T. Lee, Many-photon antibunching in generalized pair coherent states. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(3): 1569~ 1575
- [3] G. S. Agarwal, Nonclassical statistics of fields in pair coherent states. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1988, **5**

(9) : 1940~ 1947

- [4] C. T. Lee, Nonclassical photon statistics of two-mode squeezed states. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(3) : 1608~ 1616
- [5] W. K. Lai, V. Buzek, P. L. Knight, Dynamics of a three-level atom in a two-mode squeezed vacuum. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(9) : 6043~ 6056
- [6] 宋同强, 冯健, 徐炳振等, 对相干态与两个原子的相互作用过程中原子与场的动力学特性. 物理学报, 1995, **44**(9) : 1418~ 1425
- [7] 路洪, 彭金生, 李高翔, 双模  $SU(1, 1)$  相干态场与 V 型三能级原子相互作用的动力学. 物理学报, 1995, **44**(5) : 708~ 714
- [8] 彭金生, 李高翔, 关于双光子激光损耗机制的研究. 物理学报, 1992, **41**(10) : 1590~ 1597
- [9] 周鹏, 彭金生, 多光子 Jaynes-Cummings 模型的演化. 光学学报, 1990, **10**(9) : 837~ 844
- [10] 李高翔, 彭金生, 动态 Stark 移位对非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型中相干捕获的影响. 物理学报, 1996, **45**(1) : 37~ 45

## Dynamical Properties of Atoms and Field in the Interaction of Pair Coherent State with a Three-Level Cascade Atom

Lai Yunzhong    Tang Hongming    Rong Xingfu

(Department of Basic Science, Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan 030024)

(Received 3 December 1995; revised 18 March 1996)

**Abstract** The dynamical properties of a three-level cascade atom interacting with pair coherent state are studied. Both Rabi oscillation and the time evolution of the cross-correlation function show collapse and revival phenomena whether the individual field modes are detuned from the intermediate atomic level or not, but the times of collapses increase quickly with increasing the detuning amount. We also observed that the modes of pair coherent state show both correlation and anticorrelation depending on the time of observation.

**Key words** pair coherent state, three-level cascade atom, dynamical properties.