

表面粗糙度对点扩散函数影响的研究*

向 阳

(中国科学院长春光学精密机械研究所, 应用光学国家重点实验室, 长春 130022)

向才新

(中国科学院长春光学精密机械研究所, 长春 130022)

摘 要 建立了粗糙波面点扩散函数。所建立的点扩散函数, 包括“核”和“晕圈”两部份, 前者随粗糙度的增加而减少, 后者随粗糙度的增加而增加。

关键词 粗糙度, 点扩散函数, 像质评价。

1 引 言

点扩散函数是常用的重要像质评价方法之一^[1], 但表面粗糙度对点扩散函数的影响情况, 目前尚不清楚。另一方面, 当前常用的粗糙度公差 $0.012/\sqrt{\quad}$, 只是根据以往有限的经验, 不一定普遍都很合适, 有待于建立一套理论, 以保证加工公差“既保证像质, 又降低成本”。因此, 研究表面粗糙度对点扩散函数的影响, 是关系到像质评价和建立粗糙度公差理论的重要问题。开展研究这一问题的有 Chandley 和 Welford^[2], 他们预先牵强地假定: 近场中包含有镜向和随机两部份, 另外, 没有规范化处理无穷大积分常数等问题, 因而所得结果是有弊病的。Barakat^[3]和 Goodmann 等人^[4]只得到一般定性函数关系式。本文根据光学元件表面微观轮廓特征, 籍助粗糙波面夫琅和斐(Fraunhofer)衍射积分和统计处理方法, 以建立一种便于定量分析的粗糙波面点扩散函数, 从而得以了解粗糙度对点扩散函数的影响, 以及粗糙度公差的大体范围。

2 粗糙波面点扩散函数

波面通过有像差的成像系统, 在出瞳面 $(\xi, \eta, z = 0)$ 处的波面轮廓如图 1 中的实线所示。虚线表示参考球面 R_w , 其曲率中心位于 $k_0(x_0, y_0, z_0)$ 处, 曲率半径为 $Ok_0 = R$ 。光线 $Q'k'$ 的波面像差为 $Q'Q'_0 = W_{\text{像差}}(\xi, \eta)$, 在 $Q_0(\xi, \eta, 0)$ 点的振幅为 $A(\xi, \eta)$ 。一般情况下, $A(\xi, \eta)$ 近似为常数。这时, 根据惠更斯(Huygens)原理, 在像面上任意点 $k'(x', y', z')$ 的波振幅为^[5]:

$$u(x', y') = C \iint H(\xi, \eta) \exp[-jk(x'\xi + y'\eta)/R] d\xi d\eta \quad (1)$$

* 应用光学国家重点实验室基金资助课题。

收稿日期: 1996 年 12 月 4 日; 收到修改稿日期: 1997 年 1 月 19 日

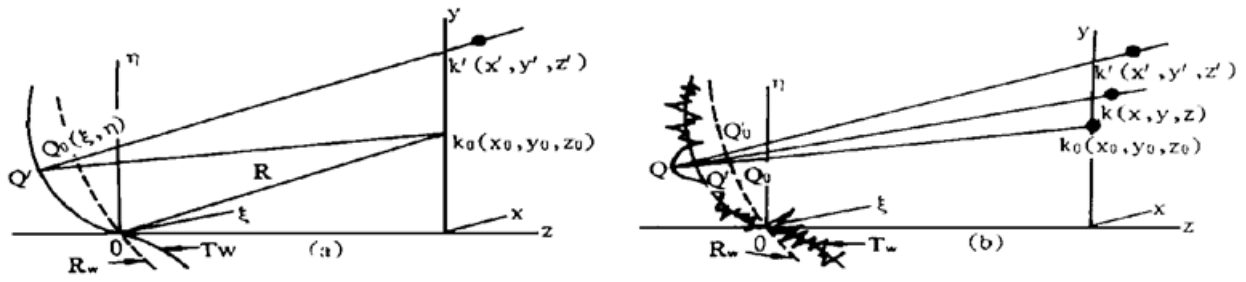


Fig. 1 Fraunhofer diffraction of rough wavefront at an aperture in a plane screen: a) only wave aberration; b) rough wavefront with aberrations. Where, R_w : reference wavefront; T_w : test wavefront

$$C = \frac{1}{R} \exp \left[-jk \left(R + \frac{x^2 + y^2 + y'y_0}{2R} \right) \right], \quad H(\xi, \eta) = \exp \left[-jkW_{\text{像差}}(\xi, \eta) \right] \quad (2)$$

(1)和(2)式中, $H(\xi, \eta)$ 为光瞳函数, $k = 2\pi/\lambda$, C 为常数。光学元件表面粗糙度, 使光滑的像差波面“粗糙化”, 如图 1 中的折线所示, Q' 点光线在像面上的位置, 随之从 $k'(x', y', z')$ 点移至 $k(x, y, z)$ 点, Q 点的波像差为 $QQ_0 = W(\xi, \eta)$ 。由于光学元件表面一般为轻度粗糙的, 故有近似关系式^[3, 6]

$$W(\xi, \eta) = W_{\text{粗}}(\xi, \eta) + W_{\text{像差}}(\xi, \eta) \quad (3)$$

式中 $W_{\text{粗}}(\xi, \eta) = QQ'$ 为元件表面粗糙度所引起的波像差。由(3)式, 当顾及粗糙度的影响时, (2)、(1)式分别改写为:

$$H(\xi, \eta) = \exp \left\{ -jk \left[W_{\text{粗}}(\xi, \eta) + W_{\text{像差}}(\xi, \eta) \right] \right\} \quad (4)$$

$$u(x, y) = C \iint \exp \left\{ -jk \left[W_{\text{粗}}(\xi, \eta) + W_{\text{像差}}(\xi, \eta) \right] \right\} \exp \left[-jk(x\xi + y\eta)/R \right] d\xi d\eta \quad (5)$$

命 $W_{\text{像差}}(\xi, \eta) = 0$, 又 $W_{\text{粗}, 1}(\xi_1, \eta_1)$ 、 $W_{\text{粗}, 2}(\xi_2, \eta_2)$ 为随机函数, 应取系综平均值^[7], 则由(5)式得到: 仅考虑粗糙度影响存在时的点扩散函数的系综平均值为

$$\begin{aligned} E[I_{\text{粗}}(x, y)] &= E[|u_{\text{粗}}(x_1, y_1) u_{\text{粗}}^*(x_2, y_2)|] \\ &= C^2 \iint_{(\xi_1, \eta_1)} \iint_{(\xi_2, \eta_2)} E[\exp \{-jk[W_{\text{粗}, 1}(\xi_1, \eta_1) - W_{\text{粗}, 2}(\xi_2, \eta_2)]\}] \\ &\quad \times \exp \{-jk[(\xi_1 - \xi_2)x + (\eta_1 - \eta_2)y]/R\} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \end{aligned} \quad (6)$$

设光瞳面与像面上的极坐标分别为 (ρ, Q) 和 (ζ, φ) , 与其相对应的直角坐标关系为

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 = \xi &= \rho \cos Q, & \eta_1 - \eta_2 = \eta &= \rho \sin Q; \\ x &= \zeta \cos \varphi, & y &= \zeta \sin \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

$W_{\text{粗}}(\xi, \eta)$ 的分布及其相关函数为高斯形、平稳和各向同性的^[4, 8], 则根据文献[9]和(7)式, 其特征函数为:

$$E[\exp \{-jk[W_{\text{粗}, 1}(\xi_1, \eta_1) - W_{\text{粗}, 2}(\xi_2, \eta_2)]\}] = \exp(-k^2\sigma^2) \exp[k^2\sigma^2 \cdot C(\rho)] \quad (8)$$

$$C(\rho) = \exp[-(\rho/l_c)^2] \quad (9)$$

式中 σ 、 $C(\rho)$ 分别为 $W_{\text{粗}}(\xi, \eta)$ 的均方差和相关系数; l_c 为相关长度。把(8)式中的 $\exp[k^2\sigma^2 \cdot C(\rho)]$ 按泰勒级数展开后, 代入到(6)式, 得:

$$\begin{aligned} E[I_{\text{粗}}(x, y)] &= C^2 \exp[-(k\sigma)^2] \left[\iint_{(\xi_1, \eta_1)} \iint_{(\xi_2, \eta_2)} \exp \left\{ -\frac{jk}{R} [(\xi_1 - \xi_2)x + (\eta_1 - \eta_2)y] \right\} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k\sigma)^{2n}}{n!} \iint_{(\xi_1, \eta_1)} \iint_{(\xi_2, \eta_2)} C^n(\rho) \exp \left\{ -\frac{jk}{R} [(\xi_1 - \xi_2)x + (\eta_1 - \eta_2)y] \right\} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \quad (10)$$

根据(7)式和文献[10], 得:

$$\iint_{(\xi_1, \eta_1)} \exp \left\{ -j \frac{k}{R} [\xi_1 x + \eta_1 y] \right\} d\xi_1 d\eta_1 = D \frac{2J_1(ka\zeta/R)}{ka\zeta/R} \quad (11)$$

$$\iint_{(\xi_2, \eta_2)} \exp \left\{ -j \frac{k}{R} [\xi_2 x + \eta_2 y] \right\} d\xi_2 d\eta_2 = \frac{2J_1(ka\zeta/R)}{ka\zeta/R} \quad (12)$$

式中 $D = \pi a^2$ 为光瞳面积, a 为光瞳半径, $J_1()$ 为一阶贝塞耳(Bessel)函数。已知^[11]:

$$\int_0^{2\pi} \exp \left[-j \frac{k\rho\zeta}{R} \cos(\varphi - Q) \right] dQ = 2\pi J_0\left(\frac{k\zeta\rho}{R}\right) \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} \exp \left[-n\left(\frac{\rho}{l_c}\right)^2 \right] J_0\left(\frac{k\zeta\rho}{R}\right) \rho d\rho = \frac{l_c^2}{2n} \exp \left[-\frac{(k\zeta_c/R)}{4n} \right] \quad (14)$$

式中 $J_0()$ 为零阶贝塞耳函数。由(7)式、(9)式、(13)式和(14)式, 当考虑到 $\rho \neq 0$ 时, $C(\rho) \rightarrow 0$, 并以 $d\xi$ 、 $d\eta$ 代替 $d\xi_2$ 、 $d\eta_2$, 得到:

$$\begin{aligned} & \iint_{(\xi_1, \eta_1)} \iint_{(\xi_2, \eta_2)} C^n(\rho) \exp \left\{ -j \frac{k}{R} [(\xi_2 - \xi_1)x + (\eta_2 - \eta_1)y] \right\} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \\ & = \pi D \frac{l_c^2}{n} \exp \left[- (k\zeta_c/R)^2 / 4n \right] \end{aligned} \quad (15)$$

(10)式中第二项 ξ_2 、 η_2 的积分是有限的, 而(15)式中 ρ 的积分是无限的。因此由(15)式代替(10)式中的积分, 可能出现常数上的差异。为此, 从能量守恒原则来规化(15)式。根据该原则, 由于 σ 的增加, (10)式两项中, 前一项所代表能量的减少量, 应等于后一项所代表能量的增加量。同时考虑到前后两者光斑面积的不相同, 致使单位面积的光通量不相同。于是采用两者光斑的面积比* $0.275(a/l_c)^2$ 来规化(15)式, 得到:

$$\begin{aligned} & \iint_{(\xi_1, \eta_1)} \iint_{(\xi_2, \eta_2)} C^n(\rho) \exp \left\{ -jk[(\xi_2 - \xi_1)x + (\eta_2 - \eta_1)y]/R \right\} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \\ & = 0.275 (D^2/n) \exp \left[- (k\zeta_c/R)^2 / 4n \right] \end{aligned} \quad (16)$$

将(11)式、(12)式、(16)式代入(10)式; 并考虑到: 光学元件表面一般为轻度粗糙的^[6], $k\sigma < 1$, $(k\sigma)^2$ 以上诸项可以略去, 于是, 由(10)式得到规化粗糙波面点扩散函数为:

$$\begin{aligned} E[I_{\text{粗}}(\zeta, \vartheta)]_{\sigma \text{小}} & = E[I_{\text{粗}}(\zeta, \vartheta)] / (CD)^2 \\ & \doteq \exp \left[- (k\sigma)^2 \right] \left[\frac{2J_1(ka\zeta/R)}{ka\zeta/R} \right]^2 + 0.275(k\sigma)^2 \exp \left[- \left(\frac{k\zeta_c}{2R} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式右侧第一、二项分别代表粗糙波面点扩散函数的“核”和“晕圈”。“核”和“晕圈”各具有以下性质:

- 1) “核”的各点强度值, 随 $(k\sigma)^2$ 的增加以相同的比值 $\exp \left[- (k\sigma)^2 \right]$ 下降;
- 2) “晕圈”的强度分布呈高斯形。随 $(k\sigma)^2$ 的增加, “晕圈”各点的强度以相同的比值

* 根据(18)式和(19)式, 晕圈半径和爱里环半径分别为 $\zeta_c \approx 0.32\lambda R/l_c$ 和 $\zeta_1 \approx 0.61\lambda R/a$, 于是, 得到两者的面积比为 $\pi\zeta_c^2/\pi\zeta_1^2 \approx 0.275(a/l_c)^2$ 。

$0.275(k\sigma)^2$ 增加。其最大值为 $\{EM\} = 0.275(k\sigma)^2$, 位于 $\zeta = 0$ 处; 在 $\zeta = \zeta_c = 2R/kl_c = 0.32\lambda R/l_c$ 处, “晕圈”强度下降到 $\{EM\}/e$ 。当 $\zeta > \zeta_c$ 时, “晕圈”强度迅速下降。通常 $a > 1000l_c$, 于是有

$$\zeta_c \gg \zeta_1 \tag{18}$$

$$\zeta_c \approx 0.32\lambda R/l_c; \quad \zeta_1 \approx 0.61\lambda R/a \tag{19}$$

式中 ζ_1 为爱里(Airy)环半径; ζ_c 定义为“晕圈”半径。以上论述表明: 当 $k\sigma < 1$ 时, “晕圈”的亮度较之“核”的是极其微弱的, 但其直径则大得多, 可能充满整个视场, 形成低亮度背景。只有当 $k\sigma \gg 1$ 时, 才可能出现较明亮的背景;

3) 当 $\sigma \approx 0$ 时, (17) 式变成通常无像差影响的爱里形点扩散函数^[10]。

对 $\sigma = 10 \text{ nm}$ 、 20 nm 、 30 nm 、 40 nm ; $\lambda = 550 \text{ nm}$, 计算了“核”的强度衰减比 $\exp[-(k\sigma)^2]$ 和“晕圈”的强度增强系数 $0.275(k\sigma)^2$, 列在表 1 中:

Table 1. Calculated data of $0.275(k\sigma)^2$ and $\exp[-(k\sigma)^2]$

$\sigma \text{ (nm)}$	5	10	20	30	40	50
$(k\sigma)^2$	0.003	0.013	0.052	0.113	0.209	0.326
$0.275(k\sigma)^2$	0.0008	0.004	0.014	0.031	0.057	0.089
$\exp[-(k\sigma)^2]$	0.997	0.987	0.949	0.890	0.811	0.722

根据(17)式和(18)式, 以及表 1 和圆形光瞳爱里斑能量分布值^[10], 对成像系统的表面粗糙度为 $\sigma = 10 \text{ nm}$ 、 20 nm 、 30 nm 和 50 nm , 计算了该系统粗糙波面点扩散函数“核”和“晕圈”的能量分布, 如图 2 所示。上述结果表明:

1) 成像系统的粗糙波面差为 $\sigma < 10 \text{ nm}$ 时, 其点扩散函数无明显变化;

2) 当粗糙度 $\sigma > 20 \text{ nm}$ 时, 开始出现明显变化, “核”各点的强度开始明显下降, “晕圈”开始明显出现, 形成亮背景, 星点图像对比降低, “核”心光斑直径开始缩小。随着 σ 的逐渐增加, 星点图象的对比愈来愈低。当 $k\sigma \gg 1$ 时, 星点图像变成没有衍射圈的模糊亮斑。

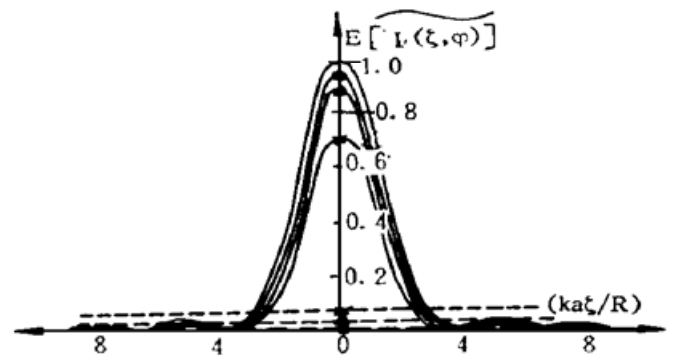


Fig. 2 Point spread functions of the rough wavefront

	“kern” distributions;	“faint ring” distributions
$\sigma = 0, 10 \text{ nm}$,	—	—
$\sigma = 20 \text{ nm}$,	- · -	- · -
$\sigma = 30 \text{ nm}$,	- Δ -	- Δ -
$\sigma = 50 \text{ nm}$,	- × -	- × -

3 实验证明

3.1 实验原理

设粗糙度有改变量 $\Delta\sigma$ 时, 粗糙波面点扩散函数的“核”和“晕圈”将产生相应的改变量 $\Delta[K_e]$ 和 $\Delta[R_i]$ 。把 $(k\sigma)^2$ 作为自变量, $\Delta[(k\sigma)^2]$ 为 $(k\sigma)^2$ 的改变量, 微分(17)式, 并根据表 1, 得到:

1) 当 $\Delta\sigma < 10 \text{ nm}$ 、即 $\Delta[(k\sigma)^2] < 0.013$ 时, 有:

$$\begin{aligned} \Delta[K_e] &< -0.013\{K_e\}, & \Delta[R_i] &< 0.275 \times 0.013 \exp[-(k\zeta_c/2R)^2], \\ \{K_e\} &= \exp[-(k\sigma)^2] [2J_1(ka\zeta/R)/(ka\zeta/R)]^2 \end{aligned} \tag{20}$$

2) 当 $\Delta\sigma > 20 \text{ nm}$ 、即 $\Delta[(k\sigma)^2] > 0.052$ 时, 有:

$$\Delta[K_e] > 0.052\{K_e\}, \quad \Delta[R_i] > 0.275 \times 0.052 \exp[-(k\sigma_c/2R)^2] \quad (21)$$

以上诸式中, $\{K_e\}$: 系统粗糙度为 σ 时的“核”能分布函数。(20) 式和图 2 表明: 当 $\Delta\sigma < 10 \text{ nm}$ 时, $\Delta[K_e]$ 比之 $\{K_e\}$ 小得多, 在光强对比目视灵敏度 $\sim 2\%$ 之下; $\Delta[R_i]$ 与 $\sigma = 0、10 \text{ nm}$ 的“晕圈”分布曲线相等同。这意味: $\Delta\sigma < 10 \text{ nm}$ 对点扩散函数分布无明显影响。(21) 式和图 2 表明: 当 $\Delta\sigma > 20 \text{ nm}$ 时, $\Delta[K_e]$ 相对于 $\{K_e\}$, 已达到或超过光强对比目视灵敏度 $\sim 2\%$ 之上; $\Delta[R_i]$ 与 $\sigma = 20 \text{ nm}$ 的“晕圈”能量分布曲线相等同。这意味: $\Delta\sigma > 20 \text{ nm}$ 对点扩散函数分布开始有明显的影晌。

3.2 实验方法与结果

在一待测系统(为无穷远共轭)前方, 依次安置透射波面差很小的不同粗糙度的平晶*, 比较各次的星点图像, 如图 3 所示。

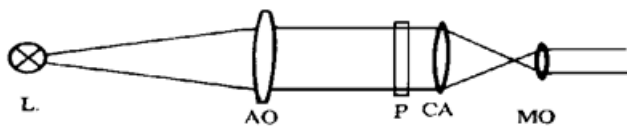


Fig. 3 Experimental setup for viewing the star images of different roughness: AO: collimator; CA: tested lens; P: rough surface plate changable (transmitted wavedeformation $< \lambda/10$); L: point lamp at the focus of AO; MO: microscopy

图 4 中的照片: (a), $\sigma_1 = 0$ 是待测系统前没有安放粗糙平晶的星点图像; (b)、(c)、(d) 是依次在待测系统前安放 $\sigma_2 = 10 \text{ nm}$ 、 $\sigma_3 = 37 \text{ nm}$ 、 $\sigma_4 = 44 \text{ nm}$ 等多种粗糙平晶后观察到的星点图像。实验结果如上述理论所预料的那样: 1) (b) 和(a) 两者的图像无明显差别; 2) (c)、(d) 图像比之(a) 的图像有明显差异, 出现了“晕圈”, 图像对比下降, “核”中心光斑直径减小; 3) (e) 是 $k\sigma \gg 1$ 的照片, 星点图像为一没有衍射圈的模糊亮斑。

采用鉴别率板代替星点板, 得到与上面相类同的结论。与其相对应的鉴别率照片放在各星点图片的下方。

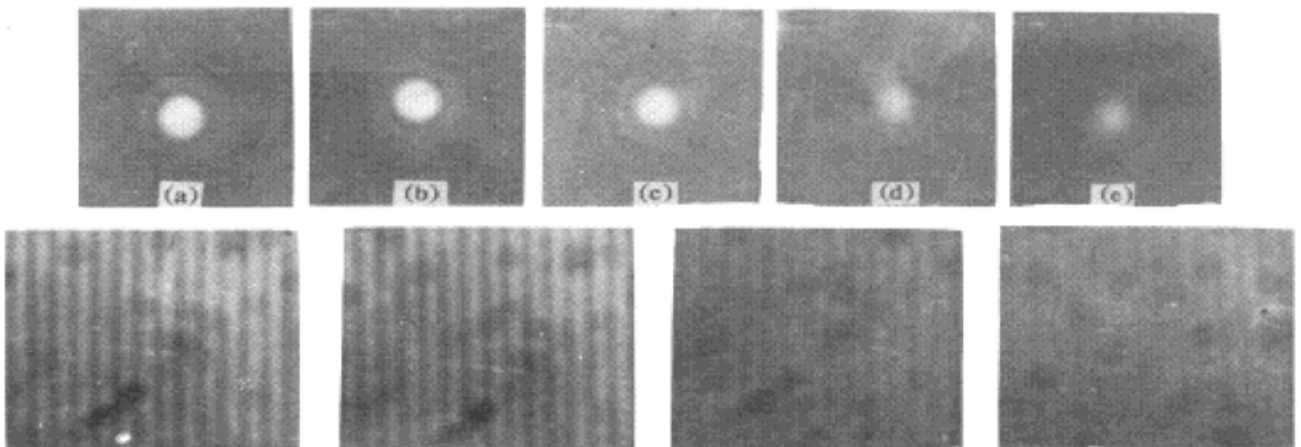


Fig. 4 The images of both star and resolution pattern for a) $\sigma = 0$; b) $\sigma = 10 \text{ nm}$; c) $\sigma = 37 \text{ nm}$; d) $\sigma = 44 \text{ nm}$; e) $\sigma k \gg \lambda$

4 结论和议论

1) 本文得到的粗糙波面点扩散函数, 具解析函数形式, 便于定量定性分析;

* 不同等级粗糙度平晶的研制, 是采用不同牌号的光学玻璃、或不同的抛光时间。采用 Form Talysurf 表面轮廓仪(横向分辨率 0.5μ 、高度灵敏度 1.0 nm) 来测定平晶的粗糙度。

2) 所得理论与实验结果, 两者基本一致;

3) 成像系统的粗糙度 $\sigma < 10 \text{ nm}$ 时, 对系统的点扩散函数无明显影响。这一结论意味: 光学系统的少量表面粗糙度误差, 并不影响系统的像质; 在一定条件下, 瑞利的 $\lambda/4$ 像质评价准则, 可以不考虑粗糙度误差的影响;

4) 当 $\sigma < 20 \text{ nm}$ 时, 星点图像开始模糊, 但还可由其图像来估值波面像差的大小^[12];

5) 当 $\sigma > 20 \text{ nm}$ 时, 星点图像明显模糊或很模糊; 系统的像质明显下降, 或下降很多;

6) 根据星点图像的模糊程度, 有可能估值 σ 的大小范围;

7) 本文有关粗糙度对星点图像、或像质影响的结论, 与系统的孔径角无关, 具有一定的普遍意义。

本文只涉及整个光学成像系统粗糙度的总影响, 关于单个元件表面粗糙度的影响及其公差, 将在另文中讨论。

参 考 文 献

- [1] D. 马拉卡拉, 光学车间检验. 北京, 机械工业出版社, 1983: 313~ 339
- [2] P. J. Chandley, W. T. Welford, A re-formulation of some results of P. Beckman for scattering from rough surface. *Opt. and Quant. Electron.*, 1975, 7(5): 393~ 397
- [3] R. Barakat, The influence of random wavefront errors on the imaging characteristics of an optical system. *Opt. Acta.*, 1971, 18(9): 683~ 694
- [4] J. W. 顾德门, 统计光学, 北京, 科学出版社, 1992: 338~ 344
- [5] 草川辙, レンズ设计のための波面光学. 日本东海大学出版社, 1976: 14~ 15
- [6] P. Beckman, A. Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Pergamon Press, 1963: 90~ 110
- [7] D. Middleton, *Statistical Communication Theory*. New York, McGraw-Hill Book Co., 1960
- [8] G. Rasigni, F. Varnier, M. Rasigni, J. P. Palmar, Autocovariance functions, for polished optical surfaces. *J. Opt. Soc. Am*, 1983, 78(2): 222~ 233
- [9] P. Beckman, A. Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*. Pergamon Press, 1963: 190, formula (41)
- [10] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1959: 392~ 397
- [11] P. Beckman, A. Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surface*. Pergamon Press, 1963: 183
- [12] 向才新, 用星点法估值波面像差 I. 球差. 光学学报, 1983, 3(2): 146~ 151
向才新, 用星点法估值波面像差 II. 慧差. 光学学报, 1983, 3(6): 557~ 561

The Effects of Surface Roughness on Point Spread Function

Xiang Yang

(State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics,
The Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022)

Xiang Caixin

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022)

(Received 4 December 1996; revised 19 January 1997)

Abstract We derived the point spread function of rough wavefront from the Fraunhofer diffraction integration of rough wavefront. The integration result consists of an "optical kernel" and a "faint ring". When the roughness increases, the former decreases, but the later increases.

Key words rough wavefront, point spread function, image quality evaluation.