

# 克尔型非线性薄膜波导的 TE 模\*

余守宪

(北方交通大学物理系, 北京 100044)

**摘 要** 对于芯区为克尔型非线性介质、覆盖层和衬底为线性介质的平板波导, 用 Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky 的渐近法导出了色散方程及场分布的二阶近似数学表达式, 使计算量大为减少且结果精确。给出了对称和非对称情况的典型实例。

**关键词** 光波导, 色散, 非线性光导波, 克尔介质。

## 1 引 言

由于非线性光导波在全光开关与全光信息处理中有重要应用, 非线性光波导的研究已受到广泛重视。对于芯区为克尔型非线性介质、覆盖层和衬底为线性介质的平板波导, 已有精确解析公式及数值计算方法的报道<sup>[1, 2]</sup>, 但所采用方法涉及雅可比椭圆函数与不完全椭圆积分等颇为繁复的计算, 在实际应用中较难处理, 计算工作量大, 不便应用。

本文作者<sup>[3]</sup>及较早些的陈智浩等<sup>[4]</sup>报道了采用均匀(重整化)微扰法导出适用于对称三层平板波导 TE 模的近似计算公式, 能求得与精确数值解吻合的结果, 此外, 也有关于弱非线性三层平板波导 TE 模的一阶近似分析的报道<sup>[5]</sup>。本文作者提出采用 Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (KBM) 法(亦称渐近法, 平均展开法)处理克尔型芯区场方程的求解, 求得了适用于对称或非对称三层克尔型介质薄膜波导的二阶近似色散方程, 可用以求得模折射率随光功率密度与波导参数的依赖关系以及非线性导波的模场分布。计算较简便且在较广的实际范围内能求得足够精确的结果。

## 2 理论分析与计算方法

已有文献指出<sup>[6]</sup>, 目前由于激光功率与材料损伤阈值的限制, 对于芯区为克尔型非线性介质的平板波导, 其折射率的非线性项远小于芯区的线性折射率  $n_f$  与衬底(或覆盖层)的折射率  $n_s$ (或  $n_c$ ) 之差, 因而, 用微扰方法完全能够满足实际情况的要求。为此, 本文采用 KBM 法来处理芯区中非线性常微分方程的求解, 由此导出用以计算 TE 模色散特性的本征值方程。

在芯区, 场强(振幅)  $E$  所满足的赫姆霍兹方程可写成

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k_0^2(\epsilon_f - \epsilon + \alpha E^2)E = 0 \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1996 年 12 月 27 日; 收到修改稿日期: 1997 年 1 月 26 日

式中  $k_0 = 2\pi/\lambda$  为真空中的波数,  $x$  轴取为垂直于薄膜的分界面,  $\epsilon_f$  为薄膜(芯区)介电系数的线性部分,  $\alpha E^2$  为非线性介电系数,  $\epsilon$  为有效介电系数即模折射率(亦称有效折射率)  $N = \beta/k_0$  的平方,  $\beta$  为传播常数。

取无量纲坐标  $S = k_0 x$ , 并令  $q^2 = \epsilon_f - \epsilon$ , 则(1)式可写成无量纲形式

$$\frac{d^2 E}{dS^2} + (q^2 + \alpha E^2) E = 0 \quad (2)$$

用 KBM 法求解(2)式<sup>[7, 8]</sup>。设解为(精确到二阶近似):

$$E = a \cos \varphi + \alpha E_1(a, \varphi) + \alpha^2 E_2(a, \varphi) + \dots \quad (3)$$

式中  $E_1$ 、 $E_2$  为  $\varphi$  的周期函数, 周期为  $2\pi$ , 而  $a$  及  $\varphi$  均为自变量  $S$  的函数, 待定。令

$$\frac{da}{dS} = \alpha A_1(a) + \alpha^2 A_2(a) + \dots \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi}{dS} = q + \alpha \Phi_1(a) + \alpha^2 \Phi_2(a) + \dots \quad (5)$$

求定  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$ , 使(3)、(4)、(5)式均满足(2)式[可以指出, 当  $\alpha = 0$  时即在线性薄膜情况下, 得到的平庸解为  $E = a \cos(k_0 q x + \varphi)$ ]。为了唯一地确定  $A_n(a)$  和  $\Phi_n(a)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 要求  $E_n(a, \varphi)$  中不包含  $\cos \varphi$  和  $\sin \varphi$ , 以消除久期项。鉴于解法已在文献[7, 8]中详细给出, 以下略去具体求解步骤与演算, 直接列出所求得二阶近似解为

$$E = a \cos \varphi + \alpha \frac{1}{32} \frac{a^3}{q^2} \cos 3\varphi - \alpha^2 \frac{1}{1024} \frac{a^5}{q^4} (21 \cos 3\varphi - \cos 5\varphi) \quad (6)$$

式中

$$a = \text{常数} \quad (\text{即 } A_1 = 0, A_2 = 0, \frac{da}{dS} = 0)$$

$$\varphi = q \left[ 1 + \alpha \frac{3}{8} \left( \frac{a}{q} \right)^2 - \alpha^2 \frac{15}{256} \left( \frac{a}{q} \right)^4 \right] S + \varphi_0 \quad (7)$$

$\varphi_0$  为常数。

用(7)式和(6)式分析对称与非对称克尔型非线性薄膜波导的 TE 导模。

### 2.1 对称三层克尔型薄膜波导

设薄膜厚度为  $d$ , 衬底及覆盖层介电系数  $\epsilon_s = \epsilon_c$  均小于薄膜的线性介电系数  $\epsilon_f$ 。令  $q^2 = \epsilon_f - \epsilon$ ,  $p^2 = \epsilon - \epsilon_s = \epsilon - \epsilon_c$ , 其中  $\epsilon = (\beta/k_0)^2$  为有效介电系数。取  $x$  轴垂直于界面, 原点在芯区中央。由对称性, 可只考虑  $x \geq 0$  上半平面内的场方程, 写成

$$E = E_c \exp[-p(S - S_0)], \quad S \geq S_0 = k_0 d/2 \quad (8)$$

$$E = a \cos \varphi + \frac{1}{32} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right) \cos 3\varphi - \frac{1}{1024} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right)^2 (21 \cos 3\varphi - \cos 5\varphi)$$

$$\varphi = q \left[ 1 + \frac{3}{8} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right) - \frac{15}{256} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right)^2 \right] S + \varphi_0, \quad S \leq S_0 \quad (9)$$

其中  $S = k_0 x$  为无量纲坐标值。对于偶模和奇模,  $\varphi_0$  的取值分别为

$$\text{偶模: } \varphi_0 = 0; \quad \text{奇模: } \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \quad (10)$$

可见场强(振幅)的极值  $E_m$  在  $\varphi = 0$  处, 且

$$E_m = a \left[ 1 + \frac{1}{32} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right) - \frac{5}{256} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right)^2 \right] \quad (11)$$

于是常数  $a$  可由  $E_m$  及有效介电系数  $\epsilon$  定出。由上可见, 用与光功率密度极值成正比的量  $W_m = \frac{1}{2} \alpha E_m^2$  (以下简称光功率密度极值) 作为给定参数较为便利, 写作

$$W_m = \frac{1}{2} \alpha E_m^2, \quad W_a = \frac{1}{2} \alpha a^2 \quad (12)$$

有

$$W_m = W_a \left[ 1 + \frac{1}{16} \frac{W_a}{q^2} - \frac{5}{64} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 \right]^2 \quad (13)$$

对给定的  $W_m$  值, 可由(13) 式求得相应的  $W_a$  值。

场分布函数的相对值可用  $\sqrt{\alpha/2E}$  即光功率密度  $W = (1/2) \alpha E^2$  的平方根来表示, 易见场强的极值位置  $x_m$  为

$$\text{偶模: } x_m = 0$$

$$\text{奇模: } x_m = \frac{\pi}{2} \frac{1}{k_0 q} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{W_a}{q^2} - \frac{15}{64} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 \right]^{-1} \quad (14)$$

由芯区-覆盖层界面 ( $S = k_0 \frac{d}{2}$ ) 处  $E$  和  $E'$  均连续的边界条件, 得到本征值方程(色散方程)为

$$\begin{aligned} & \left[ \sin \varphi + \frac{3}{16} \frac{W_a}{q^2} \sin 3\varphi - \frac{1}{256} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 (63 \sin 3\varphi - 5 \sin 5\varphi) \right] q \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{W_a}{q^2} - \frac{15}{64} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 \right] \\ & = p \left[ \cos \varphi + \frac{1}{16} \frac{W_a}{q^2} \cos 3\varphi - \frac{1}{256} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 (21 \cos 3\varphi - \cos 5\varphi) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\varphi = q \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{W_a}{q^2} - \frac{15}{64} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 \right] k_0 \frac{d}{2} + \varphi_0$$

$$\varphi_0 = 0 \text{ (偶模); } \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ (奇模)}$$

可以对给定的  $\epsilon$  值, 利用(15) 式解得相应的  $W_a$  值, 再由(13) 式得出  $W_m$  值, 也可以对给定的  $W_m$  值, 取有效介电系数  $\epsilon$  的尝试值, 由(13) 式从  $W_m/q^2$  值解得  $W_a/q^2$  值, 当所得  $W_a/q^2$  值及尝试值  $\epsilon$  满足(18) 式时, 即得所求的  $\epsilon$  值。(可按牛顿法求解方程的根的计算程序进行)。

在以上给出的各式中, 取  $\epsilon < \epsilon_f$ 。对于  $\epsilon > \epsilon_f$  的情况, 只需将  $q$  换作  $j q (j = \sqrt{-1})$ , 相应地把正弦、余弦函数换作相应的双曲余弦、双曲正弦函数, 即可求解, 但这种情况实际上难以出现, 故在此从略。

也可以用波导的总功率(相对值)  $P (P = 2 \int_0^{\infty} \alpha E^2 dx)$  作为参数, 这时, 应由给定的  $\epsilon$  值求出  $P$  值, 于是得到以  $P$  值为参数的色散特性和模场分布。

可以指出, 只要  $\epsilon_f$  与  $\epsilon_c$  之差较大于光功率密度的极值  $(1/2) \alpha E_m^2$ , 总有  $q^2$  较大于  $\frac{1}{2} \alpha E_m^2$ , 故  $W_a/q^2$  为小值, 以上的二阶近似公式可以给出足够精确的结果(见后面实例)。

## 2.2 非对称三层克尔型薄膜波导

设介电系数分别为  $\epsilon_s$ 、 $\epsilon_c$  及  $\epsilon_f + \frac{1}{2}\alpha E^2$ ，芯区厚度为  $d$ ，并取  $x$  轴原点在芯区-衬底界面处，令  $q^2 = \epsilon_f - \epsilon_s$ ， $p^2 = \epsilon_c - \epsilon_s$ ， $r^2 = \epsilon_s - \epsilon_c$ ，则场分布可表示为

$$\begin{aligned} E &= E_c \exp[-p(S - S_0)], & S \geq S_0 = k_0\alpha \\ E &= a \left[ \cos \varphi + \frac{1}{32} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right) \cos 3\varphi - \frac{1}{1024} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right)^2 (21 \cos 3\varphi - \cos 5\varphi) \right], \\ & k_0\alpha \geq S \geq 0 \\ E &= E_s \exp(rS), & S \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $S = k_0x$ ， $a$  为常数

$$\varphi = q \left[ 1 + \frac{3}{8} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right) - \frac{15}{256} \left( \frac{\alpha a^2}{q^2} \right)^2 \right] k_0x + \mathcal{Q} \quad (17)$$

取芯区-衬底界面 ( $x = 0$ ) 处的(相对)功率密度  $W_0 = (1/2)\alpha E_s^2$  为参数，仍令  $W_a = (1/2)\alpha a^2$ ，有

$$W_0 = W_a \left[ \cos \mathcal{Q} + \frac{1}{16} \frac{W_a}{q^2} \cos 3\mathcal{Q} - \frac{1}{256} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 (21 \cos 3\mathcal{Q} - \cos 5\mathcal{Q}) \right]^2 \quad (18)$$

于是由边界条件可得本征值方程(色散方程)为

$$\frac{r}{p} \frac{C(\mathcal{Q})}{C(\mathcal{Q})} = - \frac{S(\mathcal{Q})}{S(\mathcal{Q})} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} C(\mathcal{Q}) &= \cos \varphi + \frac{1}{16} \frac{W_a}{q^2} \cos 3\varphi - \frac{1}{256} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 (21 \cos 3\varphi - \cos 5\varphi) \\ S(\mathcal{Q}) &= \sin \varphi + \frac{3}{16} \frac{W_a}{q^2} \sin 3\varphi - \frac{1}{256} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 (63 \sin 3\varphi - 5 \sin 5\varphi) \end{aligned}$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q} + q \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{W_a}{q^2} - \frac{15}{64} \left( \frac{W_a}{q^2} \right)^2 \right] k_0d \quad (20)$$

求解步骤如下。已给定  $\epsilon_f$ 、 $\epsilon_s$ 、 $\epsilon_c$  及  $k_0d$ ，对给定的  $W_a$  值，取有效介电系数  $\epsilon$ ，由(19)式解出  $\mathcal{Q}$ ，再用(18)式算出相应的  $W_0$  值，于是即求得相应于给定  $\epsilon$  值的  $W_0$  值。由此得到  $\epsilon \sim \alpha E_s^2/2$  的关系曲线。场分布可由  $\sqrt{\alpha/2}E$  的数值给出(场强的相对值)。

同样，也可以用波导的总功率  $P$  为参数，给出  $\epsilon \sim P$  曲线及给定  $P$  值的模场分布曲线。

## 3 实例计算和讨论

以两种典型实例，给出对称与非对称克尔型薄膜波导 TE 模的数值结果，以说明本方法的有效性与精确度，并作适当讨论。

### 3.1 对称克尔型自聚焦薄膜波导

取  $\epsilon_f = 1.52^2 = 2.3104$ ， $\epsilon_c = \epsilon_s = 1.50^2 = 2.25$ 。图 1 给出用本法计算的  $TE_0$ 、 $TE_1$  与  $TE_2$  模[给定薄膜内光功率密度极值  $W_m = (1/2)\alpha E_m^2$ ] 的色散曲线，并与线性波导情形进行比较，结果与本文作者在文献[3]中的以及陈智浩等在文献[4]中所报道的结果完全符合，与精确数值计算结果<sup>[9]</sup>相吻合。图中基模  $TE_0$  没有截止频率，而高阶模的截止频率(可在色散方

程中令  $\epsilon = \epsilon_c$  求得) 则随光功率密度的增加而减少。

### 3.2 非对称克尔型自聚焦薄膜波导

取  $\epsilon_f = 2^2 = 4$ ,  $\epsilon_s = 1.5^2 = 2.25$ ,  $\epsilon_c = 1$  (空气层), 对  $k_0d = \pi$  即  $d = \lambda/2$  情况计算了  $TE_0$  模和  $TE_1$  模的模折射率  $N = \sqrt{\epsilon} = \frac{\beta}{k}$ 。随光功率

密度  $W_0 = \frac{1}{2} \alpha E_s^2$  的增加而增加的曲线, 如图 2 所示。分别计算了相对应的  $TE_0$  模及  $TE_1$  模场强振幅

$\sqrt{\frac{\alpha}{2}} E$  在芯区中的变化曲线, 如图 3 所示, 图 3 清楚地显示出在实际出现的光功率不太强的情况下, 场分布与线性波导的场分布虽大体相似, 但峰值随光功率增大而升高, 场分布曲线相对地变陡变窄, 表现出明显的自聚焦作用。

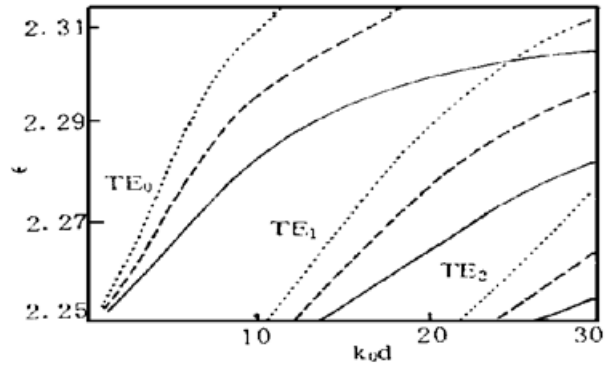


Fig. 1 Dispersion characteristics of symmetric nonlinear planar waveguide with Kerr-type film. Effective permittivity  $\epsilon$  versus  $k_0d$  ( $\epsilon_f = 2.3104$ ,  $\epsilon_s = \epsilon_c = 2.25$ ,  $\alpha > 0$ )  $\cdots$ ,  $(1/2)\alpha E_m^2 = 0.02$ ;  $-\cdot-$ ,  $(1/2)\alpha E_m^2 = 0.01$ ;  $---$ ,  $\alpha = 0$  (linear guide)

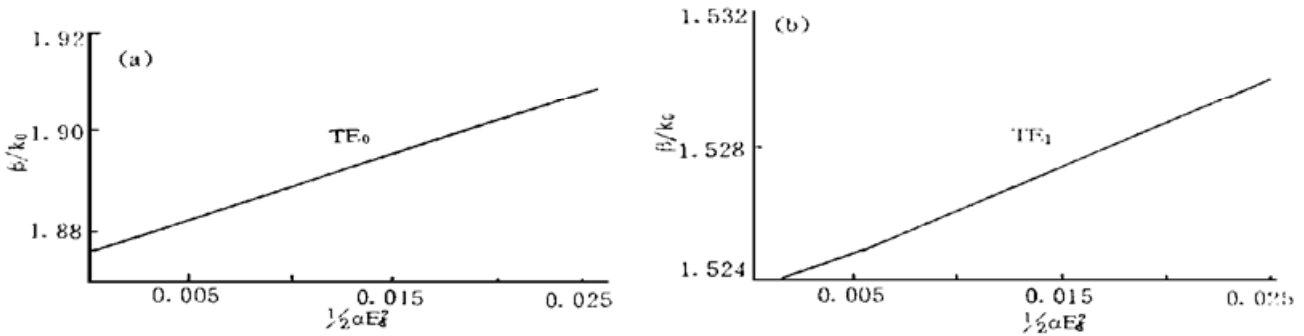


Fig. 2 Effective index  $\beta/k_0$  versus power density  $(1/2)\alpha E_s^2$  for (a)  $TE_0$  mode and (b)  $TE_1$  mode of nonlinear planar waveguide

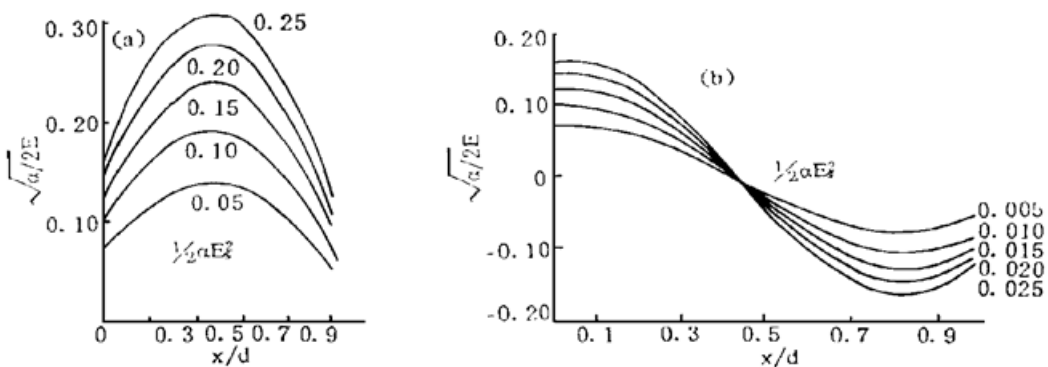


Fig. 3 Relative electric field amplitude  $\sqrt{\alpha/2} E$  within the nonlinear film, (a)  $TE_0$  mode; (b)  $TE_1$  mode ( $\epsilon_f = 4$ ,  $\epsilon_s = 1$ ,  $\epsilon_c = 2.25$ ,  $k_0d = \pi$ )

### 参 考 文 献

[1] A. D. Boardman, P. Egan, Optically nonlinear waves in thin films. *IEEE J. Quantum. Electron.*, 1986, **QE-22**(2) : 319~ 324

- [2] D. Mihalache, M. Bertolotti, C. Sibilia, Nonlinear wave propagation in planar guides. *in Progress in Optics* X XVII. Elsevier, New York, 1984, Chapter IV, § 3 : 252~ 274
- [3] 余守宪, 对称非线性薄膜波导 TE 模的色散特性. 量子电子学, 1996, **13**(1) : 81~ 85
- [4] 陈智浩, 非线性对称平板波导 TE 模色散特性的近似计算. 光子学报, 1993, **22**(1) : 77~ 83
- [5] 曹庄琪, 周 骏, 陈英礼, 克尔型介质平板波导中的弱非线性横向电磁波. 光学学报, 1996, **16**(3) : 348~ 351
- [6] K. S. Chiang, R. A. Sammut, Effective-index method for spatial solitons on planar waveguides with Kerr-type nonlinearity. *J. Opt. Soc. Am, (B)*, 1993, **10**(4) : 704~ 708
- [7] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*. Wiley, New York, 1979
- [8] 谢省宗, 谢泰森, 摄动法, 现代工程数学手册, 第二卷, 武昌, 华中工学院出版社, 1986, 第三十九篇, 1305~ 1307
- [9] K. Ogusu, TE waves in a symmetric dielectric slab waveguide with a Kerr-like nonlinear permittivity. *Opt. and Quantum Electronics*, 1987, **19**(1) : 65~ 72

## TE Modes in a Planar Waveguide with Kerr-Type Nonlinear Film

She Shouxian

(*Department of Physics, Northern Jiaotong University, Beijing 100044*)

(Received 27 December 1996; revised 26 January 1997)

**Abstract** For planar waveguide with Kerr-type nonlinear film and linear substrate and cladding, the propagation characteristics of TE modes are analysed by KBM method in perturbation theory. The dispersion equation and modal field function are given by second order approximate formulas. The computation is greatly reduced and the results are exact. Typical examples for symmetric and asymmetric nonlinear waveguides are given.

**Key words** waveguide, dispersion, nonlinear guided wave, Kerr-type medium.