第 17 卷 第 12 期　　光 学 学 报　　Vol. 17, No. 12
1997 年 12 月　　ACTA OPTICA SINICA　　December, 1997

度规光学中的聚焦定理及其应用*

朱莳通　邓锡铭
(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)
季沛勇　沈文达
(上海大学(嘉定)物理系, 上海 201800)

摘　要　度规光学中的聚焦定理被导出。给出了光束的聚焦、散焦和陷的条件。讨论和分析了在静态轴对称介质中的应用。

关键词　度规光学,　聚焦定理。

1　引　　言

近年来, 人们借助光学度规成功地研究了光与物质相互作用的许多物理过程和现象。例如: 强场物理中起重要作用的广义相对论有质动力[1], 在拍频激光加速器中的电子能量增益[2]和频率匹配[3], 介质背景对氢原子能级的影响[4]。在近期论文中, 作者又给出了强激光等离子体的光学度规[5]和黎曼几何[6], 以及在这样几何中光子的运动[7], 自由电子的经典[8, 9]和量子[10, 11]的行为。在题为"几何光学中的弗马原理和度规光学中的零测地线"的论文中, 揭示了对应几何光学的三维空间几何和对应度规光学的四维时空几何之间的联系。在文献[12]中, 研究了具有两类抛物折射率的光纤中的光线径迹。指出测地线方程决定光线的径迹, 而测地线偏离方程可以描述光束的聚、散焦性质。但是, 通常求解测地线偏离方程是相当困难的。由于光学度规与引力度规在数学上的等价, 可以类同广义相对论聚焦定理的推导[13]来导出度规光学中的聚焦定理, 并应用它来分析光束的聚焦、散焦和陷。不必具体解方程就可知道光束传输中的大致特性。

2　度规光学中的聚焦定理

假定 $\mathscr{A}$ 是充满光子的表面的面积, a 是标量波的振幅。光子通量的守恒给出

$$\mathscr{A}a^2 = C_0 = \text{const} \tag{1}$$

即

$$\partial_k(\mathscr{A}a^2) = 0 \tag{2}$$

* 国家高技术惯性约束聚变基金和国家自然科学基金资助项目。
收稿日期: 1996 年 12 月 16 日

由文献[14]给出的标量振幅的传播方程

$$\partial_k a = -\frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{k})a \tag{3}$$

将方程(2)代入(3)式，考虑到 $\mathrm{d}\mathscr{A}/\mathrm{d}\lambda = \partial_k\mathscr{A} = \nabla_k\mathscr{A} = 2\mathscr{A}^{1/2}(\mathrm{d}\mathscr{A}^{1/2}/\mathrm{d}\lambda)$，并再对 λ 求导得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{A}^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{1}{2}\{[\nabla_k(\nabla\cdot\boldsymbol{k})]\mathscr{A}^{1/2} + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{k})(\nabla\cdot\boldsymbol{k})\mathscr{A}^{1/2}\} \tag{4}$$

因为

$$\nabla_k(\nabla\cdot\boldsymbol{k}) = k_\mu(k^\nu;\nu)^{;\mu} \tag{5}$$

而

$$B^{\mu;\alpha}_{;\mu} = B^{\mu\ ;\alpha}_{;\mu} + R^\alpha_\mu B^\mu \tag{6}$$

这里 R^α_μ 是 Ricc 张量。于是，(5)式可以写为

$$\begin{aligned}\nabla_k(\nabla\cdot\boldsymbol{k}) &= k_\mu(k^\nu_{;\nu})^{;\mu}\\ &= k_\mu[k^{\nu;\mu}_{;\nu} - R^\mu_\nu k^\nu]\\ &= k_\mu k^{\nu;\mu}_{;\nu} - k_\mu R^\mu_\nu k^\nu\\ &= k_\mu k^{\nu;\mu}_{;\nu} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu\end{aligned} \tag{7}$$

用波矢量的传播方程 $\nabla_k\boldsymbol{k} = k_\mu k^{\nu;\mu} = 0$ 和 $(k_\mu k^{\nu;\mu})_{;\nu} = k_{\mu;\nu}k^{\nu;\mu} + k_\mu k^{\nu;\mu}_{;\nu} = 0$ 得到

$$k_\mu k^{\nu;\mu}_{;\nu} = -k_{\mu;\nu}k^{\nu;\mu} = -k_{\nu;\mu}k^{\nu;\mu} \tag{8}$$

于是(4)式可以被写作

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{A}^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2} = -(|\sigma|^2 + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu)\mathscr{A}^{1/2} \tag{9}$$

这是度规光学中的聚焦定理。其中

$$|\sigma|^2 \equiv \frac{1}{2}k_{\nu;\mu}k^{\nu;\mu} - \frac{1}{4}(k^\mu_{;\mu})^2 \tag{10}$$

显然，光束的聚焦要求

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \qquad (\text{即 } k^\mu_{;\mu} = 0) \tag{11}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{A}^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2} < 0, \qquad [\text{即}(|\sigma|^2 + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu) > 0] \tag{12}$$

而光束的散焦要求

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \qquad (\text{即 } k^\mu_{;\mu} = 0) \tag{13}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{A}^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2} > 0, \qquad [\text{即}(|\sigma|^2 + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu) < 0] \tag{14}$$

光束的陷则要求

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \qquad (\text{即 } k^\mu_{;\mu} = 0) \tag{15}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{A}^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2} = 0, \qquad [\text{即}(|\sigma|^2 + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu) = 0] \tag{16}$$

3　聚焦定理的应用

本节应用聚焦定理来讨论和分析静态轴对称介质中光束的聚、散焦和陷的特性。

静态轴对称介质的光学度规为[13]

$$\mathrm{d}S^2 = -\frac{c^2}{n^2}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Phi^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{17}$$

其中, $n \equiv n(r)$, $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \Phi, z)$。于是, 由 $k^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\lambda$, 求得

$$k^0 = c_t n^2, \qquad k^1 = [c_t^2 n^2 - (c_\phi^2/r^2) - c_z^2]^{1/2}, \qquad k^2 = c_\phi/r^2, \qquad k^3 = c_z. \tag{18}$$

和

$$k_0 = -C_t, \qquad k_1 = [c_t^2 n^2 - (c_\phi^2/r^2) - c_z^2]^{1/2}, \qquad k_2 = c_\phi, \qquad k_3 = c_z. \tag{19}$$

方程(18)和(19)中的 c_t, c_ϕ 和 c_z 是积分常数。

非零的光学度规系数是

$$g_{00} = -1/n^2, \qquad g_{11} = 1, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{33} = 1 \tag{20}$$

非零的仿射联络是

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = -n_{,r}/n, \qquad \Gamma^1_{00} = -n_{,r}/n^3, \qquad \Gamma^1_{22} = -r, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r. \tag{21}$$

非零的 Ricci 张量是

$$R_{00} = (n_{,rr}/n^3) - 2n_{,r}^2/n^4) + (n_{,r}/n^3 r)$$
$$R_{11} = (2n_{,r}^2/n^2) - (n_{,rr}/n), \qquad R_{22} = -(rn_{,r}/n). \tag{22}$$

把方程(18)和(21)代入方程(13), 给出

$$\frac{\partial k^1}{\partial r} = [(n_{,r}/n) - (1/r)]k^1 = (k^1)^{-1}[c_t^2 n n_{,r} + (c_\phi^2/r^3)]. \tag{23}$$

即

$$n^2 = n_0^2(c_z^2 r^2 + c_\phi^2)/(c_t^2 n_0^2 r^2 + c_\phi^2) \tag{24}$$

这里, n_0 表示 $r = 0$ 处的折射率。

用方程(18)~(24), 计算方程(12), 得到

$$|\sigma|^2 + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = k_{\mu;\nu}k^{\mu;\nu} + R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$$
$$= 4c_\phi^2 c_z^2(c_t^2 n_0^2 - c_z^2)/(c_z^2 r^2 + c_\phi^2)(c_t^2 n_0^2 r^2 + c_\phi^2) > 0 \tag{25}$$

显然, 光束聚焦要求初始条件

$$c_x^2 n_0^2 > c_z^2 \tag{26}$$

由方程(14), 得到光束散焦要求初始条件

$$c_t^2 n_0^2 < c_z^2 \tag{27}$$

由方程(16), 得到光束陷的初始条件是

$$c_t^2 n_0^2 = c_z^2 \tag{28}$$

把方程(19)代入不等式(26)、(27)和(25)式, 可以看到条件(26)~(28)等价于下面条件(29)

$$k_3^2 < k_0^2 n_0^2 = (\omega n_0/c)^2, \qquad k_3^2 > k_0^2 n_0^2 = (\omega n_0/c)^2, \qquad k_3^2 = k_0^2 n_0^2 = (\omega n_0/c)^2 \tag{29}$$

因此, 只要初始时刻 $(\omega n_0/c) > k_3$, 光束将聚焦, 而如果初始时刻 $(\omega n_0/c) < k_3$, 光束将散焦。一旦初始时刻 $(\omega n_0/c) = k_3$, 则光束将在介质中传播很长一段距离而不改变其光束的直径, 即处于陷的状态。

参 考 文 献

[1] Shitong Zhu, Wenda Shen, General relativistic ponderomotive force in a moving medium. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1987, **4**(5) : 739~ 742

[2] 朱莳通, 沈文达, 邓锡铭等, 激光加速器中电子能量增益的广义协变推导. 物理学报, 1989, **38**(4) : 559~ 566

[3] 朱莳通, 拍波激光加速器中的频率匹配. 物理学报, 1989, **38**(7) : 1167~ 1171

[4] Zhu Shitong, Shen Wenda, Ji Peiyong *et al.*, Effect of medium background on the hydrogen spectrum. *Proceedings of the Topical Meeting on Laser Materials and Laser Spectroscopy* (A Satellite Meeting of IQEC'88), Wang Zhijiang and Zhang Zhiming ed. (World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1988), 190

[5] 朱莳通, 沈文达, 强激光等离子体的光学度规描述. 物理学报, 1993, **42**(9) : 1438~ 1442

[6] Shitong Zhu, Qizhi Guo, Wenda Shen *et al.*, Riemannian geometry of strong-laser plasma. *Intern. J. Theoret. Phys.*, 1995, **34**(2) : 169~ 178

[7] 郭奇态, 沈文达, 朱莳通, 强激光等离子体中光子的运动. 物理学报, 1995, **44**(3) : 396~ 400

[8] 郭奇志, 沈文达, 朱莳通, 强激光等离子体中自由电子的经典行为. 物理学报, 1995, **44**(2) : 210~ 215

[9] Wenda Shen, Shitong Zhu, Qizhi Guo, Classical description of the radiation of a charged particle in a strong-laser plasma. *Intern. J. Theoret. Phys.*, 1995, **34**(10) : 2095~ 2104

[10] Wenda Shen, Shitong Zhu, Wave function of a free electron in a laser plasma via Riemannian geometry. *Intern. J. Theoret. Phys.*, 1995, **34**(10) : 2085~ 2094

[11] 朱莳通, 沈文达, 郭奇志, 强激光等离子体中的自由电子波函数. 物理学报, 1993, **42**(9) : 1471~ 1478

[12] Wenda Shen, Shitong Zhu, Ximing Deng, The light tracks in the optical fibers with two types of parabolic refractive indices. *Chin. J. Lasers*, 1996, **B5**(6) : 516~ 525

[13] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*. (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973), 570

The Focusing Theorem in Metric Optics and Its Application*

Zhu Shitong Deng Ximing

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

Ji Peiyong Shen Wenda

(*Department of Physics, Shanghai University* (*Jiading*), *Shanghai* 201800)

(Received 16 December 1996)

Abstract The focusing theorem in the metric optics is derived. The conditions of focusing, defocusing and trapping of light beam are given. Its application in a static axial-symmetric medium is discussed and analysed.

Key words metric optical, focusing theorem.

* Supported by the National Hi-Tech ICF Foundation and the National Natural Science Foundation.