

# 三维光强有序分布的获得: 从结构导出相干光束的配置\*

林 巍 程丙英 梅东滨 李宏强 李兆霖 张道中

(中国科学院物理所光学开放实验室和中国科学院凝聚态物理中心, 北京 100080)

**摘 要** 以体心四方为例, 叙述了由相干结构导出入射光配置的原则和方法。用相干光强的分布模拟晶格点阵。选择这样几组晶面, 使它们的密勒指数较低且具有对称性。通过建立这些晶面与相干光束之间的几何关系, 就可能获得光束配置的解析解。这种方法比数值模拟方法有明显的优越性。

**关键词** 晶格, 多光束干涉, 入射光。

## 1 引 言

相位关联的几束光在相干区域可形成类似于晶格结构的干涉图案。各个格点就是一个小小的光学陷阱, 陷阱中心是光强极大点。在适合条件下, 电介质颗粒会由于光梯度力而被束缚于陷阱中, 构成一种特殊的介电结构。周期相当于光波长量级的这类结构具有若干不寻常的光学性质, 如光子能隙或自发跃迁禁戒等<sup>[1]</sup>。这对于研制新一代的光电材料是很有意义的。本文作者曾对各种不同光入射条件下的相干图案进行了计算机模拟计算, 获得了几种不同的结构类型并加以实验验证<sup>[2]</sup>。这种方法是利用平面波叠加原理, 根据预先给定的光线入射角, 计算出光强极大值的空间分布, 进而得到这种结构的晶格常数。由于这种方法预先并不能知道所能得到的晶格结构类型, 而是要经过多次改变入射参数摸索出变化规律, 逐渐逼近某种结构, 显然运算是繁杂的。最好是将这种运算倒过来, 即从所要的结构定出光束的入射参数, 从而避免运算的盲目性。基于这种想法, 作者找到了一种可行的方法, 利用晶面与入射光线的固有联系, 对所求的结构常数与各入射光的入射参数建立方程, 获得了几种常用结构的入射参数解析解。本文以体心四方、面心四方为例介绍这种方法。

## 2 原 则

两束光干涉能在空间形成一系列极大值平行平面, 平面内光强处处相等, 平行平面之间的垂直距离由入射光波长及两束光之间的夹角确定, 其面间距

\* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1996 年 11 月 7 日

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)} \quad (1)$$

其中  $\lambda$  为入射光波长,  $\theta$  为两光束夹角。同时平面的方位也是确定的, 它们垂直于两入射光束所构成的平面, 且与两入射光束的角平分面平行。当入射光束多于两束时, 所形成的不同平行平面的组数为  $(n-1) + (n-2) + \dots + 1$ , 其中  $n$  为不同向的入射光束数。这些方向不同的平面组相互交叠会形成极值点或极值线。当入射光束强度都相等时, 极值点处的光强与形成这些平面的光束数的平方成正比。因此极值点处的光强要比其它位置上的大几倍, 能够形成光学陷阱。若每一极值点都包括了所有入射光的贡献, 且这些极值点的空间分布具有良好的周期特性, 那么这种周期分布就是所需的晶格点阵。在这种情况下, 由格点所组成的晶面可以通过(1)式的关系与入射光线联系在一起。因此, 对于给定的晶格结构, 可先找出能形成该结构的光强极大值平面, 进一步由光线成面的方式, 确定光线的入射角。

当入射光束大于 3 束时, 所形成的平面组数要大于光束数。在确定格点中什么样的晶面作为这些平面组, 以及在选择哪两束光形成哪一组平面时, 选择的可能性会变得很多。原则上, 可由每一组平面与相应的形成该平面的光束建立一方程, 所有平面组的联立方程的解即为相应结构的入射光参数。但即使对于一个较为简单的六个平面组的情况, 联立方程中就有 24 个方程, 且未知数为偶次幂, 获得解析解是较为困难的。研究中发现, 当选取的平面组具有一定对称性时, 通常可以通过几何方法, 估计出光线的大致方位, 再根据少数晶面与入射光线的关系求出光线的入射角, 最后验证其它晶面的条件是否满足, 若满足则得到一组解。这就把求解过程大大简化。

### 3 体心四方结构

如前所述, 当结构被确定, 即可选择合适的晶面, 通过晶面与入射光线的关系, 可求出光的入射参数。体心四方是一种常见的晶体结构, 三个晶轴中两个相等, 轴之间的夹角均为  $90^\circ$ 。而面心立方、体心立方均为它的特殊情况。形成这种三维结构至少需要 4 束光。4 束光两两相干形成 6 组平行平面, 格点由这些平面相交构成。首先是要在这种结构上选择 6 组晶面, 通过选取密勒指数较低的晶面作为所要进行计算的平行平面。它将使晶格结构与平面的关系比较清楚简单。在体心结构中所选的 6 个晶面必须通过所有格点, 包括体心点。平面组确定之后, 再找出可能形成这些平面的光束组合。需要有一个尝试过程, 使得光束方位安排与平面的方位自洽。对于体心四方结构, 显然 6 个对角面是一种非常有希望的选面方法。它们的密勒指数较低, 且对称性高。如图 1(a) 所示, 所取的 6 个对角面分别为  $AFGD$  和  $BCHE$ ,  $BGHA$  和  $CFED$ , 以及  $BFHD$  和  $CGEA$ 。这 6 个对角面所代表的晶面的面间距分别是: 前 4 个晶面的面间距为  $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , 而  $BFHD$  和  $CGEA$  晶面的面间距为  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 。  $a$ 、 $a$  和  $b$  分别为三个晶轴的长度。在建立面间距和光线夹角的联系之前, 须确定各晶面是由哪两束光线形成的。记四束光为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ 。对于两晶面  $CGEA$  和  $BFHD$ , 形成它们的四束光可以有两种组合。如  $I_1$ 、 $I_2$  光形成  $CGEA$  面,  $I_3$ 、 $I_4$  光形成  $BFHD$ 。由于两晶轴长度都为  $a$ , 这两个晶面必须相互垂直, 因此这两组光线所在的平面也必须相互垂直。当这两个面与光束的关系确定以后, 另 4 个面与光束的关系便不能随意确定, 要在与前两种组合不矛盾的情况下选择。由极值面与光束的关系可知, 通过光束相交点的极值面必须垂直于两光束所组成的入射光平

面, 且与它们的角平分线相重合。基于上述条件, 要形成与前两个面有一倾角的另外 4 个面, 光  $I_1$ 、 $I_2$  与光  $I_3$ 、 $I_4$  应分别位于上下两个半空间内。比如可以选择  $I_1$ 、 $I_2$  光在下半个空间,  $I_3$ 、 $I_4$  光在上半个空间。那么在剩下的组合中可以选定  $I_1$ 、 $I_3$  光形成  $BGHA$  面, 则  $I_2$ 、 $I_4$  光形成  $CDEF$ 。剩下的组合只能是  $I_1$ 、 $I_4$  光形成  $BCHE$ , 而  $I_2$ 、 $I_3$  光形成  $AFGD$  面。这种光线的安排方法示于图 1(b), 其中  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$  光线所在的平面与图 1(a) 中的面对应, 关键是要认定角的平分面正好是相应的晶面。

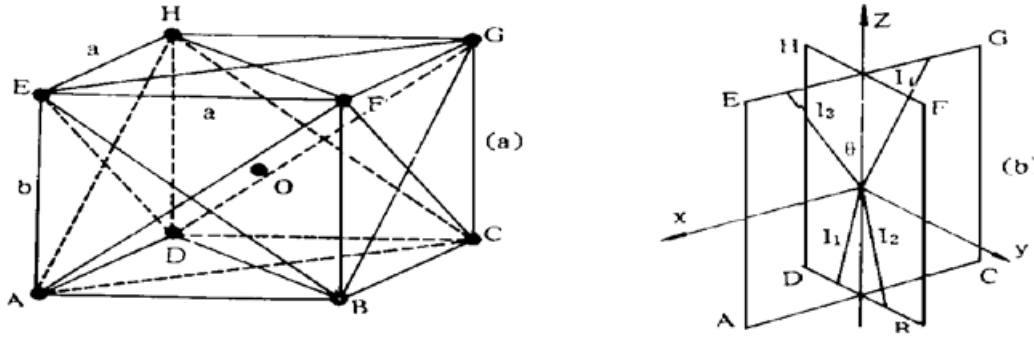


Fig. 1 Crystal planes of BCT structure (a) and orientation of incident beams (b)

利用这种光线的取法, 得到一组解。如图 1(b) 所示, 由于  $CGEA$  面和  $BFHD$  面相互垂直, 就取它们分别为  $xz$ 、 $yz$  面, 以 4 束光的交点为原点建立坐标系。由晶面与入射平面垂直特性可判定  $I_1$ 、 $I_2$  光在  $BFHD$  面, 用  $I_3$ 、 $I_4$  光在  $CGEA$  面, 即  $I_1$ 、 $I_2$  光在  $yz$  平面,  $I_3$ 、 $I_4$  光在  $xz$  平面。由此立即给出  $I_1$ 、 $I_2$  光与  $I_3$ 、 $I_4$  光的方位角各差  $90^\circ$ , 而每一入射面内的两束光的方位角差为  $180^\circ$ 。由于两晶面的面间距相等, 可推出  $\theta_{12} = \theta_{34}$ 。由另外 4 个对角面的面间距也相等可推出  $\theta_{13} = \theta_{14}$ ,  $\theta_{23} = \theta_{24}$ 。  $\theta_{ij}$  表示第  $i$  束与第  $j$  束之间的夹角。由  $\theta_{ij}$  之间的关系总结出在这种取面的方法中, 光线的极角  $\theta$  与方位角  $\psi$  只有以下取值。

Table 1. Polar angles and orientational angles for incident beams

incident beam	polar angle ( $\theta$ )	orientational angle ( $\psi$ )
$I_1$	$180^\circ - \theta$	$270^\circ$
$I_2$	$180^\circ - \theta$	$90^\circ$
$I_3$	$\theta$	$0^\circ$
$I_4$	$\theta$	$180^\circ$

按照表 1 列出的这一光线的取法, 参照图 1(b), 用矢量代数的方法可获得以下关系

$$\theta_{12} = 2\theta \tag{2}$$

$$\cos \theta_{13} = -\cos^2 \theta \tag{3}$$

由面间距与光束夹角的关系式(1)可得

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\lambda}{2 \sin (\theta_{12} / 2)} \tag{4}$$

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\lambda}{2 \sin (\theta_{13} / 2)} \tag{5}$$

将(4)式与(5)式合并整理, 得

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \operatorname{ctag} \theta \tag{6}$$

如果晶格常数  $a$  和  $b$  确定, 则可根据(6)式求出极角  $\theta$ 。每束光的入射参数  $\theta_i$  与  $\psi_i$  便由此确

定。

严格地, 上述推导并没有用到全部的已知条件, 如其它 4 个晶面的取向条件。因此需要对上述结构加以验证, 以保证所形成的结构为体心四方。方法之一是验证这 4 个晶面是否为相应光束的角平分面。由图 1(b) 可写出 4 束光的矢量为

$$I_1 = -\sin \theta y - \cos \theta z \tag{7}$$

$$I_2 = \sin \theta y - \cos \theta z \tag{8}$$

$$I_3 = \sin \theta x + \cos \theta z \tag{9}$$

$$I_4 = -\sin \theta x + \cos \theta z \tag{10}$$

先求  $I_1$ 、 $I_4$  光所形成的  $BCH E$  面的法线。它们的角平分线矢量为  $I_1 + I_4$  (矢量相加), 所构成的平面的法线为  $I_1 \times I_4$  (矢量相乘), 因此  $I_1$ 、 $I_4$  光的角平分面的法矢  $A_{14}$  可根据 (7) ~ (10) 式得出

$$\begin{aligned} A_{14} &= (I_1 + I_4) \times (I_1 \times I_4) \\ &= -\sin^3 \theta (-x + y + 2 \operatorname{ctag} \theta z) \end{aligned} \tag{11}$$

另外, 已知晶格结构中的晶面的法矢可用三个晶轴的晶格常数表示。借用图 1(b) 中的坐标系, 可看出  $BCH E$  晶面中的两条特殊矢量  $OH$  与  $OE$  分别为  $OH = (0, -\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2})$ ,  $OE = (-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, \frac{b}{2})$ , 该面的法矢则是  $OH \times OE$

$$OH \times OE = \frac{\sqrt{2}}{4} ab (-x + y + \frac{\sqrt{2}a}{b} z) \tag{12}$$

由晶面与光束的关系式 (6) 不难看出上式中的  $\sqrt{2} \frac{a}{b}$  正好等于  $2 \operatorname{ctag} \theta$ 。由此可证明  $A_{14}$  与  $OH \times OE$  的单位矢量相同, 即由  $I_1$ 、 $I_4$  光所形成的平行平面正好是晶面  $BCH E$ 。同理可以证明其它三个角平分面正好是相应的晶面。因此可以确认表 1 所给的参数正是所需的一组解。

根据 (6) 式可以推导出两个重要结构的入射参数。

1) 体心立方结构。它是  $a = b$  时的体心四方结构, 将其代入 (6) 式可得解析解:

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \theta = 54.73^\circ \tag{13}$$

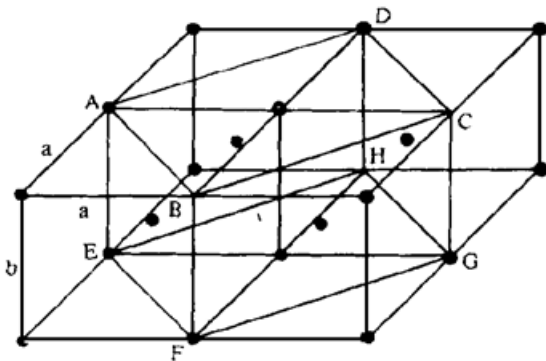


Fig. 2 Relation between FCT and BCT structure

2) 面心立方结构。从图 2 中, 可以看出由  $ABCD$  和  $EFGH$  点构成的面心结构是体心四方结构的一种演变。图中 4 个体心四方相邻的格点构成了一个面心结构。当晶格长  $a \cdot b = 1 \cdot \sqrt{2}$  时, 体心立方演变为面心立方。将这一比例关系代入 (6) 式后, 得到面心立方的光入射角关系式:

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{4}{5}}, \quad \theta = 63.43^\circ \tag{14}$$

公式 (13) 和 (14) 得到的结构与先前用数值模拟

计算的结果是完全一致的。

在选择不同结构的晶面时, 其取法是可以不同的。可以预期对于同一种结构, 光线的极角及方位角也可以是不同的。因而提供了光入射的选择机会, 它相应于联立方程的多解。

以上求出的体心四方的入射光是从两个半空间向中心对射的, 这对于实验观察是不利的。一般希望从半个空间内射向一点, 另半个空间可用于观察或记录。根据晶面取法的多样性, 可以找到另一种实用的光线入射方向。将图 1(a) 中体心四方的对角面  $CDEF$  更换为图 3(a) 中的  $OPQR$  面, 从而获得体心四方结构的另一组入射参数。利用与前述类似的晶面与光线组合方法, 所得下列光线的安排是对应于这种取面方式的唯一结果。

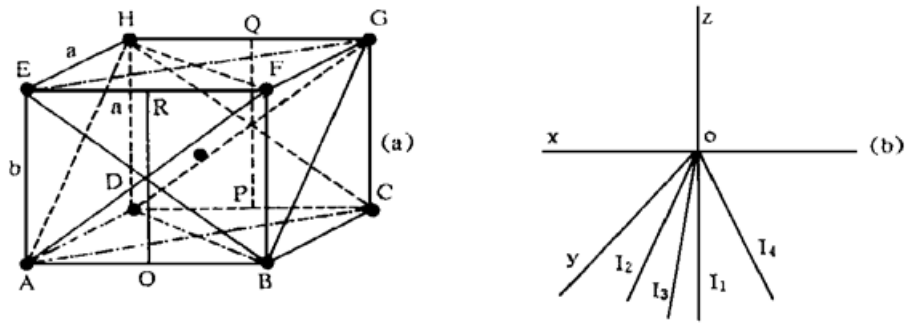


Fig. 3 Another method for selecting crystal planes of body centered structure (a) and the orientations of incident beams (b)

如图 3(b) 所示,  $I_1、I_2、I_4$  光在  $xz$  平面内;  $I_1、I_3$  光在  $yz$  平面内, 两个平面相互垂直。 $I_1$  光与  $z$  轴同向, 它与另 3 束光的夹角都为  $\theta$ 。由这一几何安排得到的夹角关系式为

$$\cos \theta_{23} = \cos^2 \theta \tag{15}$$

$$\theta_{12} = \theta_{14} = \theta_{13} = \theta \tag{16}$$

类似地, 根据面间距与光线夹角的关系式(1) 获得

$$\sin^2(\theta_{23}/2) = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \sin^2(\theta_{12}/2) \tag{17}$$

将(15)式与(16)式代入上式, 得出 4 束光的极角关系式

$$\cos \theta = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \tag{18}$$

与前一种情况一样, 当  $a \cdot b = 1 \cdot \sqrt{2}$  时, 成为面心立方结构, 此时

$$\cos \theta = \frac{1}{3}; \quad \theta = 70.56^\circ \tag{19}$$

在形成体心四方结构的第一种方法中, 四束光与  $z$  轴的夹角均相等, 那么  $\theta$  不一样时, 会产生什么结构呢? 这里讨论一种较为简单的角度改变。如  $I_1、I_2$  光与  $z$  轴的夹角为  $\theta_1$ ,  $I_3、I_4$  光与  $z$  轴的夹角为  $\theta_2$ ,  $\theta_1 \neq \theta_2$ 。此时四束光将形成斜体结构, 既可以是体心的, 也可以是面心的。这一结果很容易从图 2 中的结构关系得到解释。当  $\theta_1$  不等于  $\theta_2$  时, 原来相等的两个晶轴不再相等, 此时所构成的面心结构中的晶面如  $ABCD$  面, 不再是四方, 而是一菱形, 因此晶体结构不再是方形的, 而是一个斜体。经较为繁杂的计算可获得的该斜体的晶格常数与入射角的关系为

$$a = \frac{\lambda}{\sin(\theta_1/2)} \tag{20}$$

$$b = \frac{\lambda}{\sin(\theta_2/2)} \tag{21}$$

$$c = \frac{\lambda(1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2)}{\sin^2 \theta_1 \cos \theta_2 + \sin^2 \theta_2 \cos \theta_1} \tag{22}$$

除了体心四方结构外,还用这种方法研究了形成其它一些布拉菲格子的光束参数。这些研究表明,对于一个给定的结构,找到合适的晶面及晶面与光束的对应关系后,就能通过简单的几何运算求出相应结构的入射参数。此法比原来的数值模拟方法更优越的是,它可较清楚地给出入射光束的改变对结构产生的影响。原则上,这就提供了更多的能用多光束干涉来形成的结构。

### 参 考 文 献

- [1] Sajeev John, Jian Wang, Quantum optics of localized light in a photonic band gap. *Phys. Rev. (B)*, 1991, **43**(16) : 12772~ 12789  
[2] 程丙英, 张毅, 梅东滨等, 用多光束干涉模拟晶格图案. *光学学报*, 1996, **16**(6) : 797~ 800

## Formation of Ordered 3D Distribution of Light Intensity: from Structure to Orientation

Lin Wei      Cheng Bingying      Mei Dongbin      Li Hongqiang  
Li Zaolin      Zhang Daozhong

(*Optical Physics Laboratory, Institute of Physics and Center of Condensed Matter Physics,  
The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080*)

(Received 7 November 1996)

**Abstract** By an example of Tetragonal structure, the principle and method are described by which the orientation of light can be derived from interference structure. We use crystal lattice analogy to the intensity distribution of interference structure. Those crystal planes should be selected such that their Miller indices are lower and the planes have high symmetry. An analytic solution then should be obtained by setting geometric relations between the crystal planes and the incident light. The advantages of this method are obvious compared to that of numerical analysis.

**Key words** crystal lattice, interference of multiple laser beam, incident light.