

位相光栅衍射的矢量解法*

傅克祥 王植恒 张大跃 文 军 唐 晋

(四川大学物理系, 成都 610064)

摘 要 采用矢量理论处理了多台阶位相光栅的衍射问题。用半数值的方法把微分方程转化成广义本征值方程。在利用纵向边值关系作模式匹配时, 引入了模式变换阵、反射系数阵和透射系数阵, 从而获得了计算电磁场振幅系数阵的递推公式, 最后求出任意偏振状态下各级透射波和反射波的衍射效率。采用此法设计的程序极大地减少了运算量, 计算稳定可靠, 可快速地在微机上计算具有任意多个台阶光栅的衍射问题, 从而为用矢量衍射迭代方法设计二元光学元件提供了一种快速简便的算法。所得结论与标量衍射理论有较大差异。

关键词 矢量理论, 多台阶位相光栅, 二元光学, 半数值方法, 模式变换阵, 反射系数阵, 透射系数阵。

1 引 言

二元光学元件的设计和制作, 涉及到多台阶位相光栅的衍射。当光栅线度接近于波长时, 标量衍射理论不再成立。目前矢量衍射理论所引入的巨大运算量使得采用矢量理论计算和设计二元光学元件十分困难。本文力图找出一种矢量方法, 在微机上作快速计算来克服目前的困难。在石油测井领域中, 为了减少运算量, 采用半数值的方法对微分方程进行求解已见于许多文献^[1~4]。为了提高计算精度, 有人采用了三次 Hermite 样条函数^[4, 5]作为基函数。在利用纵向边值关系来确定解中的待定常数而作模式匹配时, 引入了模式变换阵、反射系数阵和透射系数阵的概念, 从而获得了一组求解反射系数阵、透射系数阵、电磁场振幅系数阵的递推公式^[3, 4, 6]。由此设计的计算程序稳定可靠。本文在他们的基础上, 把这些思想和方法引入到位相光栅的矢量解法中, 把基函数作适当的推广, 把递推公式作适当的优化, 从而大大减少了计算量。而目前在采用矢量衍射理论来处理光栅问题的文献^[7~12]中, 没有全面采用上述处理方法。为了突出这种处理方法, 本文仅讨论了一种光栅衍射的特例。

2 物理模型和数学模型

对于图 1 所示的多台阶位相介质条形周期结构光栅, 设光栅沿 y 轴, 基片平面垂直于 z 轴, 把求解区域划分成若干个水平分层(如图中的 6 个分层)。在每一分层内, 介电常数具有周期性, 使 $\epsilon(x) = \epsilon(x + T_0)$, 而 $\mu = \mu_0$ 。在一个周期内, 当 $x \in [0, T_1]$ 时, $\epsilon = \epsilon_0$; 当 $x \in$

* 本文得到中国工程物理研究院第二研究所和国家教委回国人员基金的资助。

收稿日期: 1997 年 1 月 11 日; 收到修改稿日期: 1997 年 3 月 13 日

[T_l, T_0] 时, $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ 。本文仅研究当电磁波垂直入射到光栅基片上时, 反射波和透射波的场分布及其各级衍射效率。

对于垂直入射的任意平面电磁波, 总可以分解成沿 y 方向偏振(TE)和沿 x 方向偏振(TM)的两线偏振波的迭加, 这两个偏振入射波可分别表示成

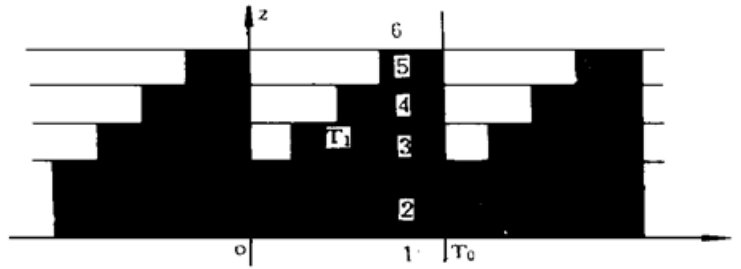


Fig. 1 Structure of the grating and its laminating method

$$\text{TE:} \quad E_\lambda = e_y E_{y0} \exp [iK_0(z-z_1)], \quad H_\lambda = -e_x \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{y0} \exp [iK_0(z-z_1)] \quad (1)$$

$$\text{TM:} \quad E_\lambda = e_x E_{x0} \exp [iK_0(z-z_1)], \quad H_\lambda = e_y \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{x0} \exp [iK_0(z-z_1)] \quad (2)$$

在这种条件下, 各层中的电磁场解应当与 y 坐标无关。

1) 对于 TE 波, 各层中的电场只有 y 分量, 可设定为(n 代表层号)

$$E_n = e_y E_n(x) \exp [i\Lambda_n(z-z_n)] C_n \quad (3)$$

在周期性条件下, 由麦克斯韦方程组容易获得 $E_n(x)$ 满足的微分方程、边值关系和周期性条件为

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + K_n^2 - \Lambda_n^2 \right] E_n(x) = 0 \quad (4)$$

$$E_n(x) \Big|_{x=x_l^-} = E_n(x) \Big|_{x=x_l^+} \quad \frac{\partial E_n(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_l^-} = \frac{\partial E_n(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_l^+} \quad (5)$$

$$E_n(x, z) \Big|_{z=z_n} = E_{n+1}(x, z) \Big|_{z=z_n} \quad \frac{\partial E_n(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_n} = \frac{\partial E_{n+1}(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_n} \quad (6)$$

$$E_n(x) \Big|_{x=0} = E_n(x) \Big|_{x=T_0} \quad \frac{\partial E_n(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial E_n(x)}{\partial x} \Big|_{x=T_0} \quad (7)$$

由(4)、(5)、(7)式可求得各层中的 $E_n(x)$, 再代回麦克斯韦方程中, 可求得各层中的磁场为

$$H_n = + \frac{1}{\omega\mu_0} \left[e_x E_n(x) \Lambda_n - e_z i \frac{\partial E_n(x)}{\partial x} \right] \exp (i\Lambda_n(z-z_n)) C_n \quad (8)$$

最后由(6)式来确定待定常数 C_n 。

2) 对于 TM 波, 各层中的磁场只有 y 分量, 可设定为

$$H_n = e_y H_n(x) \exp [i\Lambda_n(z-z_n)] C_n \quad (9)$$

与 TE 波相似, 容易获得 $H_n(x)$ 满足的微分方程, 边值关系和周期性条件为

$$\left[\epsilon \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dx} \right] + K_n^2 - \Lambda_n^2 \right] H_n(x) = 0 \quad (10)$$

$$H_n(x) \Big|_{x=x_l^-} = H_n(x) \Big|_{x=x_l^+} \quad \frac{1}{\epsilon_n^-} \frac{\partial H_n(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_l^-} = \frac{1}{\epsilon_n^+} \frac{\partial H_n(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_l^+} \quad (11)$$

$$H_n(x, z) \Big|_{z=z_n} = H_{n+1}(x, z) \Big|_{z=z_n} \quad \frac{1}{\epsilon_n} \frac{\partial H_n(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_n} = \frac{1}{\epsilon_{n+1}} \frac{\partial H_{n+1}(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_n} \quad (12)$$

$$H_n(x) \Big|_{x=0} = H_n(x) \Big|_{x=T_0}, \quad \frac{\partial H_n(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial H_n(x)}{\partial x} \Big|_{x=T_0} \quad (13)$$

由(10)式、(11)式、(13)式可求得各层中的 $H_n(x)$ ，再代回麦克斯韦方程中，可求得各层中的电场为

$$\mathbf{E}_n = \frac{1}{\omega\epsilon} \left[-\mathbf{e}_x H_n(x) \Lambda_n + \mathbf{e}_z i \frac{\partial H_n(x)}{\partial x} \right] \exp [i\Lambda_n(z - z_n)] C_n \quad (14)$$

最后由(12)式来确定待定常数 C_n 。(TM 波中的 Λ_n 、 C_n 完全不同于 TE 波中的 Λ_n 、 C_n)

3) 对于任意的偏振波，其结果是上述两结果的矢量迭加。

3 微分方程的数值求解方法^[4]

对于 TE 波是求解本征方程

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + K^2 - \Lambda^2 \right] \psi(x) = 0 \quad (15)$$

其中 ψ 代表第 n 层的横电场 $E_n(x)$ 。

把本征函数 $\psi(x)$ 用一组完备的基函数阵 $g(x)$ 来拟合，使

$$\psi(x) = g^T(x) b \quad (16)$$

其中 $g(x)$ 采用拟合效果较好的三次 Hermite 样条函数^[5, 6]，任一元素 $g_j(x)$ 的具体表达式如下

$$g_{2k+1} = \begin{cases} \frac{(x - x_{k-1})^2(3x_k - x_{k-1} + 2x)}{(x_k - x_{k-1})^3} & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{(x - x_{k+1})^2(3x_k - x_{k+1} + 2x)}{(x_k - x_{k+1})^3} & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases} \quad (17a)$$

$$g_{2k+2} = \begin{cases} \frac{(x - x_{k-1})^2(x - x_k)}{(x_k - x_{k-1})^2} & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{(x - x_{k+1})^2(x - x_k)}{(x_k - x_{k+1})^2} & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases} \quad (17b)$$

其中 x_k 代表在区间 $[0, T_0]$ 中的分点坐标，若分段数为 $\frac{N}{2}$ ，则 $K = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1; j = 1, 2, \dots, N$ 。

为了满足周期性条件[(7)式]，在 $k = 0$ 点处的基函数应表示成

$$g_1 = \begin{cases} \frac{(x - x_{N/2-1})^2(3x_{N/2} - x_{N/2-1} + 2x)}{(x_{N/2} - x_{N/2-1})^3} & x \in [x_{N/2-1}, x_{N/2}] \\ \frac{(x - x_1)^2(3x_0 - x_1 + 2x)}{(x_0 - x_1)^3} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & x \notin [x_0, x_1], [x_{N/2-1}, x_{N/2}] \end{cases} \quad (18a)$$

$$g_2 = \begin{cases} \frac{(x - x_{N/2-1})^2(x - x_{N/2})}{(x_{N/2} - x_{N/2-1})^2} & x \in [x_{N/2-1}, x_{N/2}] \\ \frac{(x - x_1)^2(x - x_0)}{(x_0 - x_1)^2} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & x \notin [x_0, x_1], [x_{N/2-1}, x_{N/2}] \end{cases} \quad (18b)$$

把(16)式代入(15)式,并用积分算子 $\int_0^T dx g(x)$ 作用于等式两端,得广义本征值方程

$$A b = G b \Lambda^2 \quad (19)$$

$$G = \int_0^T g g^T dx, \quad G_{ij} = \int_0^T g_i(x) g_j(x) dx \quad (20)$$

$$A = \int_0^T (K^2 g g^T - \dot{g} \dot{g}^T) dx, \quad A_{ij} = \int_0^T [K^2(x) g_i(x) g_j(x) - \dot{g}_i(x) \dot{g}_j(x)] dx \quad (21)$$

G 为正定对称方阵, A 为对称方阵, Λ^2 为由 N 个本征值 Λ_i^2 构成的对角阵, b 为由 N 个本征矢构成的方阵。

解广义本征值方程(19)得 Λ 和 b , 本征函数阵 $\Psi(x)$ 就由(16)式完全确定了。由于每一层中的边界位置不同(指 x_i), 所以各层中的 N 个本征模式是不相同的。

根据本征值问题的性质, 本征函数 $\Psi(x)$ 应满足下述正交归一关系

$$\int_0^T \Psi^T(x) \Psi(x) dx = b^T G b = I \quad (22)$$

其中 I 为单位矩阵。这就是说, 本征矢 b 还应按(22)式作归一化处理。

4 模式匹配定解方法

先讨论 TE 波电场振幅系数 C_n 的确定方法, 而 TM 波完全类似。

由于每个本征值 Λ_i^2 对应着两个值(+ Λ_i 、- Λ_i), 所以(3)式所示任一 n 层中的电场应重新表示成入射波与反射波之和。定义反射系数阵 R_n^+ 和广义反射系数阵 $R_n(z)$, 使反射波等于反射系数乘以入射波, 从而得

$$R_n(z) = \exp[-i\Lambda_n(z - z_n)] R_n^+ \exp[-i\Lambda_n(z - z_n)] \quad (23)$$

$$E_n(x, z) = g^T(x) b_n [I + R_n(z)] \exp[i\Lambda_n(z - z_n)] C_n^+ \quad (24)$$

其中, $\exp[i\Lambda_n(z - z_n)]$ 为对角阵, C_n^+ 代表第 n 层上界面 z_n 处入射波(或称上行波)的振幅系数列条阵, R_n^+ 代表上界面处的反射系数阵。

把(24)式代入边值关系(6)式中, 得

$$\begin{cases} g^T(x) b_n (I + R_n^+) C_n^+ = g^T(x) b_{n+1} (I + R_{n+1}^-) C_{n+1}^- \\ g^T(x) b_n \Lambda_n (I - R_n^+) C_n^+ = g^T(x) b_{n+1} \Lambda_{n+1} (I - R_{n+1}^-) C_{n+1}^- \end{cases} \quad (25)$$

其中

$$R_n^- = \exp[i\Lambda_n(Z_n - Z_{n-1})] R_n^+ \exp[i\Lambda_n(Z_n - Z_{n-1})] \quad (26)$$

$$C_n^+ = \exp[i\Lambda_n(Z_n - Z_{n-1})] C_n^- \quad (27)$$

C_n^- 代表第 n 层下界面 Z_{n-1} 处入射波的振幅系数列条阵, R_n^- 代表下界面处的入射波传到上界面处经反射后再传到下界面处的反射系数阵。进行模式匹配, 定义

$$F_{n,n+1} = \int_0^T dx b_n^T g(x) g^T(x) b_{n+1} = b_n^T G b_{n+1} \quad (28)$$

为从第 n 层的模式转换到第 $n+1$ 层模式的模式变换系数阵。由(25)式可以求得下述递推式

$$C_{n+1}^- = T_n C_n^+ \quad (29)$$

$$T_n = [\Lambda_n^{-1} F_{n,n+1} \Lambda_{n+1} + \frac{1}{2} (F_{n,n+1} - \Lambda_n^{-1} F_{n,n+1} \Lambda_{n+1}) (I + R_{n+1}^-)]^{-1} \quad (30)$$

$$R_n^+ = F_{n,n+1} (I + R_{n+1}^-) T_n - I \quad (31)$$

其中 T_n 代表在上界面处从第 n 层向第 $n+1$ 层的透射系数阵。此递推公式的运算量仅为文献 [5, 11] 的 $\frac{1}{3}$ 。

由于最高层 M 中无反射, 所以 $R_M = 0$, 从最高层开始, 利用(30)、(31)、(26)式, 向下递推求得各界面处的透射系数阵 T_n 和反射系数阵 R_n^* 。又由于入射波已给定, 因而第一层上界面 Z_1 处入射波的振幅系数阵 C_1^\dagger 可确定出来(见后), 进而利用(29)、(27)式, 由下向上递推出各层中电场的振幅系数 C_n^-, C_n^+ , 任一层中的电场表达式由(24)式完全确定。最后一层 M 中的透射场和第一层中的反射场被表示成

$$E_{\text{透}}(x, z) = g^T(x) b_M \exp [i\Lambda_M(z - z_{M-1})] C_M^- \quad (32)$$

$$E_{\text{反}}(x, z) = g^T(x) b_1 \exp [-i\Lambda_1(z - z_1)] R_1^\dagger C_1^\dagger \quad (33)$$

再代入(8)或, 求得磁场矢量为

$$\mathbf{H}_{\text{透}} = \frac{1}{\omega\mu_0} [\mathbf{e}_x g^T(x) \Lambda_M + \mathbf{e}_z i g^T(x)] b_M \exp [i\Lambda_M(z - z_{M-1})] C_M^- \quad (34)$$

$$\mathbf{H}_{\text{反}} = \frac{1}{\omega\mu_0} [-\mathbf{e}_x g^T(x) \Lambda_1 + \mathbf{e}_z i g^T(x)] b_1 \exp [-i\Lambda_1(z - z_1)] R_1^\dagger C_1^\dagger \quad (35)$$

C_1^\dagger 按下述方法确定: 根据(24)式, 入射波电场被表示成

$$E_\lambda(x, z) = g^T(x) b_1 \exp [i\Lambda_1(z - z_1)] C_1^\dagger \quad (36)$$

它必须等于已给定的平面电磁波解

$$E_\lambda(x, z) = E_{y_0} \exp [iK_0(z - z_1)] \quad (37)$$

从而得

$$\begin{cases} C_1^\dagger = (C_0, 0, \dots, 0), & (\Lambda_1)_1 = K_0 \\ C_0 = \int_0^{T_0} g(x) (b_1)_1 E_{y_0} dx = \int_0^{T_0} E_{y_0} dx = E_{y_0} T_0 \end{cases} \quad (38)$$

5 TE 波的各级衍射效率

为了获得透射波和反射波各级衍射的衍射效率, 可把场的表达式(32)~(35)式按各级衍射波展开。

在真空中, 反射波和透射波的表达式应当为

$$\mathbf{E}_{\text{透}} = \mathbf{e}_y \sum_{j=1}^N a_j \exp \{i[K_{xj}x + \Lambda_j(z - z_{m-1})]\} \quad (39)$$

$$\mathbf{E}_{\text{反}} = \mathbf{e}_y \sum_{j=1}^N b_j \exp \{i[K_{xj}x + \Lambda_j(z - z_1)]\} \quad (40)$$

为了使(39)、(40)式满足真空中的亥姆霍兹方程, 各级衍射波波矢量的 x 分量应满足关系

$$K_{xj} = \sqrt{K_0^2 - \Lambda_j^2} \quad (41)$$

而沿 x 方向的周期性条件要求

$$K_{xj} = \frac{2\pi j}{T_0}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (42)$$

只有当 Λ_j 为非零实数时, 第 j 级衍射波才是真实传播的衍射波。由(41)、(42)式得

$$\Lambda_j = \pm \sqrt{\left[\frac{2\pi}{\lambda_0}\right]^2 - \left[\frac{2\pi j}{T_0}\right]^2} \quad (43)$$

显然, 真实传播的衍射波的级次是有限的, 其最大衍射级次 J 必须满足条件

$$\left[\frac{2\pi}{\lambda_0} \right]^2 > \left[\frac{2\pi J}{T_0} \right]^2 \quad (44)$$

从而得

$$|J| = \text{取整} \left[\frac{T_0}{\lambda_0} \right] \quad (45)$$

当 $\lambda_0 < T_0 \leq 2\lambda_0$ 时, 只存在 0 级和 ± 1 级衍射波; 当 $T_0 \leq \lambda_0$ 时, 只存在 0 级波, 即不存在偏离入射方向的透射波和反射波。设第 j 级衍射波的偏转角为 θ_j , 则

$$\sin \theta_j = \frac{K_{xj}}{K_0} = \frac{\lambda_0 j}{T_0} \quad (46)$$

从而得

$$\theta_j = \sin^{-1} \left(\frac{\lambda_0 j}{T_0} \right) \quad (47)$$

从(39)、(40)式可以看出, 场含 x 的函数部分是三角函数, 如果 $g^T(x)b$ 能准确拟合三角函数 $\sin(K_{xj}x)$ 、 $\cos(K_{xj}x)$ 及其线性组合, 则可证明

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1, & a_{2j} = \frac{\alpha_{2j} - i\alpha_{2j+1}}{\sqrt{2T_0}}, & a_{2j+1} = \frac{\alpha_{2j} + i\alpha_{2j+1}}{\sqrt{2T_0}} \\ b_1 = \beta_1, & b_{2j} = \frac{\beta_{2j} - i\beta_{2j+1}}{\sqrt{2T_0}}, & b_{2j+1} = \frac{\beta_{2j} + i\beta_{2j+1}}{\sqrt{2T_0}} \end{cases} \quad (48)$$

其中 $\alpha_k = (C_M)_k$, $\beta_k = (R^\dagger)_{k,1}(C^\dagger)_1$, $j = 1, 2, \dots$ 。

定义各级透射效率 η_k^T 和反射效率 η_k^R :

$$\eta_k^T = \frac{\overline{\mathbf{S}_k^T \cdot \mathbf{e}_z}}{\overline{\mathbf{S}_\lambda \cdot \mathbf{e}_z}}, \quad \eta_k^R = \frac{\overline{\mathbf{S}_k^R \cdot \mathbf{e}_z}}{\overline{\mathbf{S}_\lambda \cdot \mathbf{e}_z}} \quad (49)$$

其中 $\overline{\mathbf{S}_\lambda \cdot \mathbf{e}_z}$ 代表入射电磁波能流密度的 z 分量对时间和空间(x 方向)的周期平均值, $\overline{\mathbf{S}_k^T \cdot \mathbf{e}_z}$ 和 $\overline{\mathbf{S}_k^R \cdot \mathbf{e}_z}$ 分别代表第 k 级透射波和反射波能流密度的 z 分量对时间和空间的周期平均值。利用(49)式, 可求得

$$\eta_k^T = a_k a_k^* \Lambda_k / k_0, \quad \eta_k^R = b_k b_k^* \Lambda_k / k_0 \quad (50)$$

其中设定 $E_{y0} = 1$, Λ_k 为空气层中第 k 级的本征值。当 Λ_k 为非零实数时, 第 k 级衍射效率 η_k^T 、 η_k^R 才有意义, 因此

$$\sum_k (\eta_k^T + \eta_k^R) = 1 \quad (51)$$

经计算得到的结果完全满足(51)式。

6 TM 波的求解

TM 波与 TE 波所满足的微分方程[见(10)式]及边值关系均相似, 周期性条件也相同, 因而求解过程与上述完全相同。为了满足边值关系[(11)式], 仅需把基函数(17b)式和(18b)式稍作修改即可。

在解本征值方程时, (20)、(21)式应修改成

$$G_n = \int_0^{T_0} \frac{1}{\epsilon_n(x)} g_n g_n^T dx \quad (52)$$

$$A_n = \int_0^{T_0} \frac{1}{\epsilon_n(x)} [K^2 g_n g_n^T - \dot{g}_n \dot{g}_n^T] dx \quad (53)$$

在利用边值关系(12)式来找递推关系时, 仅需修改递推公式(30)、(31)、(26)、(29)、(27)式中的(30)式

$$T_n = \left[\Lambda_n^{-1} P_{n, n+1} \Lambda_{n+1} + \frac{1}{2} (F_{n, n+1} - \Lambda_n^{-1} P_{n, n+1} \Lambda_{n+1}) (I + P_{n+1}^-) \right]^{-1} \quad (54)$$

其中

$$F_{n, n+1} = b_n^T G_{n, n} b_{n+1}, \quad P_{n, n+1} = b_n^T G_{n, n+1} b_{n+1} \quad (55)$$

$$G_{n, n} = \int_0^{T_0} \frac{1}{\epsilon_n(x)} g_n g_n^T dx, \quad G_{n, n+1} = \int_0^{T_0} \frac{1}{\epsilon_{n+1}(x)} g_n g_{n+1}^T dx \quad (56)$$

反射波和透射波的表达式与(32)~(35)式相似, 仅需作下述替换即可

$$E \longrightarrow H, \quad H \longrightarrow E, \quad \mu_0 \longrightarrow \epsilon_0 \quad (57)$$

在确定 C_i^+ 时, $C_i^+ = (C_0, 0, \dots, 0)$, 而

$$C_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{x0} T_0 \quad (58)$$

计算衍射效率的公式仍为(50)式。由于基函数 $g(x)$ 不同, 计算 G 、 A 阵的公式不同, 计算反射阵 T_n 的公式不同, 所以 TM 波与 TE 波的各级衍射效率是不同的, 但衍射的级次数相同, 各级衍射波的方向相同。

7 计算实例

利用本文的方法已建立了相应的计算机程序, 并试算了一些结果。

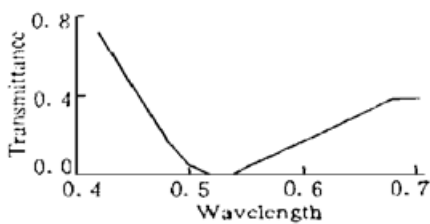


Fig. 2 The zeroth-order transmittance as a function of wavelength

为了与其它矢量算法对比, 特按文献[12]来选取参数, 对于单台阶周期光栅, 取周期为 $2 \mu\text{m}$, 填充系数为 0.5, 槽深为 $1.56 \mu\text{m}$, 基片厚度为 $2000 \mu\text{m}$, 基片的折射率为 1.5, 垂直入射, 电场的方向沿光栅线方向, 以 0 级透射效率为纵坐标, 以波长为横坐标, 取光波的波长范围为 $0.4 \sim 0.7 \mu\text{m}$, 所得结果如图 2 所示。这个结果与文献[12]图 2 中的 EP 曲线符合得较好。

结 论 利用本文的计算机程序, 所得结果初步表明:

1) 计算结果稳定可靠。对于具有任意多个台阶的光栅(包括基片厚度)均可计算, 所得结果与其它矢量衍射理论解法^[12]所得结果相符。

2) 计算速度快。对于 P5-133 微机, 计算 8 台阶问题; 运算一次不超过 5 秒。

3) 各级衍射波的效率与光栅周期 T_0 、占空比 b 、光栅台阶数 n 、光栅深度 h 、基片厚度 D 有关, 但各级衍射波(指透射和反射中的传播波)的效率之和为 1, 误差不超过 0.1%。在某种结构参数下, 可使各级反射波的效率之和趋于零。利用此特性, 可设计出消反元件。

4) TE 波与 TM 波的衍射效率不同, 利用此特性, 可设计出偏振分离元件。

采用本文的方法为用矢量衍射迭代方法设计二元光学元件, 提供了一种快速简便的算法。其实用算例和光栅结构设计将另文讨论。

参 考 文 献

- [1] W. C. Chew, S. Barone, B. Anderson *et al.*, Diffraction of axisymmetric waves in a borehole by bed boundary discontinuities. *Geophysics*, 1984, **49**(10) : 1586~ 1595
- [2] D. M. Pai, M. Huang, A generalized Haskell matrix method for borehole electromagnetics: Theory and applications. *Geophysics*, 1988, **53**(12) : 1577~ 1586
- [3] 聂在平, Chew, W. C., Liu, Q. H., 电磁波对轴对称二维层状介质的散射. 地球物理学报, 1992, **35**(4) : 479~ 489
- [4] 张庚骥, 汪涵明, 汪功礼, 成层介质中交流电测井响应. 地球物理学报, 1995, **38**(6) : 840~ 849
- [5] 李岳生, 黄友谦编, 数值逼近, 北京, 人民教育出版社, 1978 : 132~ 140
- [6] J. R. Fox, General modal theory of scalar wave scattering by periodic surfaces. *Opt. Acta*, 1980, **27**(3) : 289~ 305
- [7] J. R. Andrewartha, G. H. Derrick, R. C. Mcphedran, A general modal theory for reflection gratings. *Opt. Acta*, 1981, **28**(11) : 1501~ 1516
- [8] 杨宝成, 庄松林, 周学松, 矩形槽光栅的矢量模式理论. 光学学报, 1989, **9**(3) : 270~ 277
- [9] 林维德, 庄松林, 周学松, 金属光栅的矢量模态理论. 光学学报, 1993, **13**(2) : 170~ 174
- [10] Weng Cho Chew 著, 聂在平, 柳清伙译, 非均匀介质中的场与波. 电子工业出版社, 1992 : 301~ 306
- [11] K. Knop, Rigorous diffraction theory for transmission phase gratings with deep rectangular grooves. *J. Opt. Soc. Am.*, 1978, **68**(9) : 1206~ 1210
- [12] E. Noponen, J. Turunen, Binary high-frequency-carrier diffractive optical elements: electromagnetic theory. *J. Opt. Soc. Am.*, 1994, **11**(3) : 1097~ 1109

A Vector Analytical Method of Phase Diffraction Grating

Fu Kexiang Wang Zhiheng Zhang Dayue Wen Jun Tang Jin

(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064)

(Received 11 January 1997; revised 13 March 1997)

Abstract A vector theory for diffraction of multi-step phase grating is presented. The half-numerical method converts differential equation into generalized eigenvalue equation. At matching the boundary conditions in the longitudinal direction, a mode conversion matrix is introduced together with the reflection and transmission coefficient matrices. The iteration formula of the amplitude coefficient of the electric field are derived out. Finally the diffraction efficiency for each order of the transmission wave and the reflection wave are obtained in the any polarization. The computer program developed from the method has much less amount of calculation so that it can work on PC fast and stable. The method presented in this paper provides a simple fast algorithm to design binary optical element by vector diffraction. The results show that the scalar theory results differ greatly with that of the vector theory in the certain condition.

Key words vector theory, multi-step phase grating, binary optical, half-numerical method, mode conversion matrix, reflection coefficient matrix, transmission coefficient matrix.