

# 利用单模激光产生亚泊松分布的泵浦条件\*

杨 明 曹 力 吴大进

(华中理工大学物理系和激光国家重点实验室, 武汉 430074)

李再光

(华中理工大学激光国家重点实验室, 武汉 430074)

**摘 要** 用解析方法导出了单模激光场的 Mandel 因子, 从而给出了产生亚泊松分布的泵浦条件。

**关键词** 亚泊松分布, 单模激光, Mandel 因子。

文献[1~3]中指出了单模激光光子统计的新特点: 在原子与场的渡越时间  $\tau$  具有一个有限大小时, 光子数分布呈现超泊松与亚泊松的交替变化。利用该特点产生亚泊松光场的一个优点是工艺简单, 它不需要对泵噪声或自发辐射进行抑制, 并且该方法与其它手段结合(例如与泵噪声抑制结合), 可以产生更高度的亚泊松分布。

如前所述, 光子数分布随泵浦参数呈现亚泊松分布与超泊松分布的交替变化, 这就要求人们在用实验产生亚泊松光场时, 必须适当控制泵浦参数, 使之处于产生亚泊松光场的区域。但以前的文献对光场的统计性质只限于数值分析, 没能给出产生亚泊松光的泵浦条件。本文用解析方法导出了在单模激光中产生亚泊松分布的泵浦条件, 并给出了产生最大亚泊松分布的相对泵浦参数。

## 1 单模激光 Mandel 因子的计算

光子分布通常用 Mandel 因子  $Q$  来区分, 其定义为:  $Q = [(\Delta n)^2 - \bar{n}] / \bar{n} = (\overline{n^2} - \bar{n}^2 - \bar{n}) / \bar{n}$ 。当  $Q = 0$  时光子分布为泊松分布,  $Q < 0$  时为亚泊松分布, 而  $Q > 0$  时为超泊松分布。

当渡越时间  $\tau$  与原子寿命  $\nu^{-1}$  的比值  $T = \nu\tau$  具有一个有限大小, 而不是可近似为  $\infty$  时,  $t$  时刻有  $n$  个光子的几率  $P_n(t)$  可由以下主方程确定<sup>[1]</sup>:

$$P_n'(t) = r_a[\beta_{n-1}P_{n-1}(t) - \beta_n P_n(t)] - c[nP_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t)] \quad (1)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2[1 - \exp(-T)]}$$

$$\times \frac{\exp(-T) \{x \sqrt{2(n+1)/R} \sin [Tx \sqrt{2(n+1)/R}] - \cos [Tx \sqrt{2(n+1)/R}]\} + 1}{1 + 2x^2(n+1)/R} \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1996 年 9 月 16 日; 收到修改稿日期: 1997 年 1 月 22 日

$$R = r_a/c, \quad x = \sqrt{A/c}, \quad A = 2r_a(g/v)^2 \quad (3)$$

式中  $A$  为线性增益系数,  $x$  为相对泵浦参数,  $r_a$  为激光上能级原子的注入速率,  $v$  为原子能级的衰变常数,  $c$  为腔的损耗系数。(1) 式即为文献[1] 中得到的关于几率密度  $P_n(t)$  的主方程。这里没有考虑热场、吸收、以及失谐的影响, 这些因素的减弱与消除, 有利于产生更深的亚泊松分布<sup>[2]</sup>, 本节将利用方程(1) 来计算 Mandel 因子  $Q$ 。

考虑稳态情况 [ $P'_n(t) = 0$ ], 在(1) 式中, 由细致平衡原理有:

$$r_a \beta_n P_n = c(n+1) P_{n+1} \quad (4)$$

由(4) 式可得:

$$\bar{n} = \frac{r_a}{c} \sum_n \beta_n P_n = \frac{r_a}{c} \bar{\beta}_n, \quad \overline{n^2} = \frac{r_a}{c} \bar{\beta}_n + \frac{r_a}{c} n \bar{\beta}_n = \bar{n} + \frac{r_a}{c} n \bar{\beta}_n \quad (5)$$

在远高于阈值时, 预期光子数分布在  $\bar{n}$  标度下具有一个尖锐的峰值, 故可以展开  $\beta_n$ :

$$\beta_n \cong \beta_{\bar{n}} + \frac{\partial}{\partial N} \beta_n \Big|_{N=\bar{n}} (N - \bar{n}) \quad (6)$$

式中  $N = n/\bar{n}$ 。(6) 式代入(5) 式, 有

$$\bar{n} = \frac{r_a}{c} \beta_{\bar{n}}, \quad \overline{n^2} = \bar{n}^2 + \bar{n} \left[ 1 - \frac{r_a}{c} \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial N} \beta_n \Big|_{N=\bar{n}} \right] \quad (7)$$

对(2) 式求导并经过一些计算可得

$$\begin{aligned} \frac{r_a}{c} \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial N} \beta_n &= - \frac{T e^{-T}}{(4\bar{n}/R)[1 - \exp(-T)]} \\ &\times \cos \left[ T x \sqrt{2(n+1)/R} - \frac{1}{x \sqrt{2(n+1)/R}} + \frac{1}{T x \sqrt{2(n+1)/R}} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

式中假定  $\bar{n} \gg 1$ , 并考虑在远高于阈值运转时应有  $x^2 \gg 1$ , 故在计算中略去了  $1/x$  的二次以上幂。这样, 由(5)~(8) 式有

$$Q = \left[ 1 + \frac{T \exp(-T)}{(4\bar{n}/R)[1 - \exp(-T)]} \cos \left[ T x \sqrt{\frac{2}{R\bar{n}}} - \frac{1}{x \sqrt{2\bar{n}/R}} + \frac{1}{T x \sqrt{2\bar{n}/R}} \right] \right]^{-1} - 1 \quad (9)$$

(9) 式即 Mandel 因子解析表达式, 将可用它来分析光子分布随相对泵浦率  $x$  的变化情况。

### 3 讨论和结论

由(9) 式可以看出, 当改变相对泵浦参数  $x$  时,  $Q$  交替出现负值、零和正值, 相应产生亚泊松、泊松和超泊松分布交替的现象。

1) 根据(9) 式, 当

$$T x \sqrt{\frac{2}{R\bar{n}}} - \frac{1}{x \sqrt{2\bar{n}/R}} + \frac{1}{T x \sqrt{2\bar{n}/R}} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (10)$$

时为泊松分布。定义  $x_k$  为对应每一个  $k$  值的相对泵浦参数, 相应的平均光子数为  $\bar{n}_k$ , 则由(9) 式知,  $x_k$  为亚泊松分布和超泊松分布的分界点。由(5) 式及(10) 式并考虑(2) 式、(6) 式有

$$\begin{aligned} x_k &= E(k\pi + \frac{\pi}{2}) \left[ 1 - \frac{1}{[1 - \exp(-T)]} \frac{\exp(-T) E(k\pi + \pi/2) + 1}{E(k\pi + \pi/2)^2} \right]^{-1/2} \\ \bar{n}_k &= \frac{r_a}{c} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2[1 - \exp(-T)]} \frac{\exp(-T) E(k\pi + \pi/2) + 1}{E(k\pi + \pi/2)^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$E(t) = \frac{Tt + \sqrt{T^2t^2 + 4T(T-1)}}{2T^2}$$

而当  $2k\pi - \frac{\pi}{2} < Tx \sqrt{2\bar{n}/R} - (1/x \sqrt{2\bar{n}/R}) + (1/Tx \sqrt{2\bar{n}/R}) < 2k\pi + \pi/2$ , ( $k = 1, 2, 3 \dots$ )。即  $x_{2k-1} < x < x_{2k}$ , ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ) 时, 光子数分布为亚泊松分布。

同样, 当  $x_{2k} < x < x_{2k+1}$ , ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ) 时, 光子数分布为超泊松分布。

2) 由(9)式可知, 在每一个亚泊松区间  $x_{2k-1} < x < x_{2k}$  ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ), 当

$$Tx \sqrt{\frac{2}{R\bar{n}}} - \frac{1}{x \sqrt{2\bar{n}/R}} + \frac{1}{Tx \sqrt{2\bar{n}/R}} = 2k\pi, \quad (k = 1, 2, 3 \dots) \tag{12}$$

时, Mandel 因子在该区间达到极小值, 对应的泵浦参数  $x$  和平均光子数可由(12)式及(5)式并考虑(2)、(6)式而求得

$$\begin{aligned} x &= E(2k\pi) \left[ 1 - \frac{1}{[1 - \exp(-T)]} \frac{-\exp(-T)/T + 1}{E(2k\pi)^2} \right]^{-1/2}, \\ \bar{n} &= \frac{r_a}{c} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2[1 - \exp(-T)]} \frac{-\exp(-T)/T + 1}{E(2k\pi)^2} \right] \end{aligned} \tag{13}$$

这时由(9)式和(13)式得 Mandel 因子的极小值为

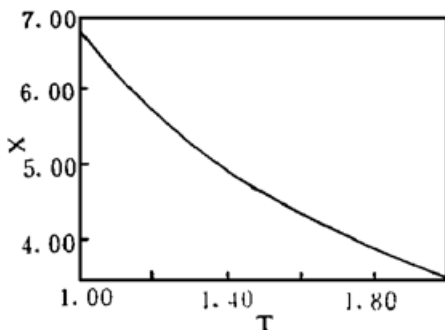
$$Q = \left\{ 1 + \frac{T \exp(-T)}{2[1 - \exp(-T)]} \left/ \left[ 1 - \frac{1}{[1 - \exp(-T)]} \frac{-\exp(-T)/T + 1}{E(2k\pi)^2} \right] \right. \right\}^{-1} - 1 \tag{14}$$

3) 由(11)式第三式, 随着  $k$  的增加,  $E(2k\pi)$  将增大, 在(14)式可以看出, 这将导致  $Q$  因子的极小值随  $k$  的增加而增大,  $k = 1$  时的极值为  $Q$  因子的最小值, 这时

$$Q_{\min} = \left\{ 1 + \frac{T \exp(-T)}{2[1 - \exp(-T)]} \left/ \left[ 1 - \frac{1}{[1 - \exp(-T)]} \frac{-\exp(-T)/T + 1}{E(2\pi)^2} \right] \right. \right\}^{-1} - 1 \tag{15}$$

相应的相对泵浦参数为

$$x = E(2\pi) \left[ 1 - \frac{1}{[1 - \exp(-T)]} \frac{-\exp(-T)/T + 1}{E(2\pi)^2} \right]^{-1/2} \tag{16}$$



在图 1 中, 由(16)式给出了  $x$  随  $T$  的变化曲线, 由曲线可以看出对应于每一个  $T$  值使  $Q$  因子最小的相对泵浦参数。在文献[1, 2] 中曾利用数值方法分析了,  $T = 1.1$  时的  $Q$  因子, 当  $x \approx 6.3$  时,  $Q$  因子最小, 这一结果可以由图 1 清楚地看出。

4) 在  $k \gg 1$  时, 由(11)式第一式得

$$x_k \cong (2k\pi + \pi/2)/T \tag{17}$$

这时, 亚泊松和超泊松分布以  $2\pi/T$  为周期变化。另外, 在  $k \gg 1$  时由(14)式及(11)式第三式有

$$Q \cong \left[ 1 + \frac{T \exp(-T)}{2[1 - \exp(-T)]} \right]^{-1} - 1 \tag{18}$$

这说明在  $k$  很大时 Mandel 因子在各个亚泊松区间的极小值趋于恒定(不随  $k$  变)。

在图 2 中, 利用(18)式给出了在  $k \gg 1$  时, 区间  $1 < T < 9$  中 Mandel 因子  $Q$  的极小值随

Fig. 1 The relative pump parameter  $x$  which makes the Mandel factor  $Q$  minimal (which is corresponding to  $k = 1$ ) as a functions of  $T$  ( $1 < T < 2$ )

$T$  变化的曲线。可以看出, 当  $T > 7$  时  $Q$  已接近于 0。

当  $x \rightarrow \infty$  时, 由(5)式及(2)式可以看出  $\bar{n} \rightarrow r_a/2c$ , 说明在  $k$  很大(即  $x$  很大)时, 不管亚泊松区间还是超泊松区间的平均光子数将趋于恒定。

5) 图 3 给出了从  $k = 1$  到  $k = 9$  及  $k \gg 1$  情况下的 Mandel 因子的极小值随  $T$  变化的曲线[(14)式及(18)式],  $T$  的区间取为  $1 < T < 1.5$ 。从图中可见, 在该区间  $Q$  的极小值随  $T$  几乎呈线性变化, 这一事实也可以从图 2 中看出。另一个有趣的现象是: 随着  $k$  的增加, 相邻曲线的间隔变小, 并最终趋于  $k \gg 1$  的曲线, 这与上面的分析符合。

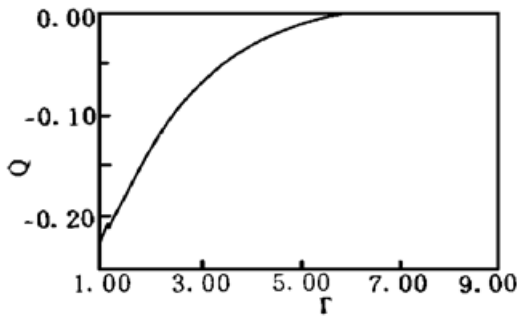


Fig. 2 The minimum of the Mandel factor  $Q$  as a function of  $T$  ( $1 < T < 9$ ) for  $k \gg 1$

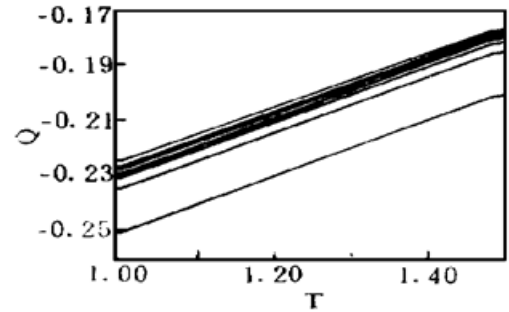


Fig. 3 The minimums of the Mandel factor  $Q$  from the lowest to the highest as function of  $T$  ( $1 < T < 1.5$ ) for  $k = 1 \sim k = 9$  and  $k \gg 1$ , respectively

6) 由图 2 及图 3 可见, 要想得到较明显的亚泊松分布,  $T$  不能取得过大, 建议  $T$  取小于 1.5 的值。

### 参 考 文 献

- [1] 顾 樵, 张纪岳, 一种产生亚泊松光场的可能途径. 光学学报, 1989, 9(5): 478~ 480
- [2] 顾 樵, 单模激光光子统计的新特点. 中国科学(A), 1990, 20(7): 721~ 727
- [3] L. Z. Wang, Shi-Yao Zhu, J. Bergou, Generation of sub-Poissonian photon statistics in a two-level atomic oscillator. *Phys. Rev. (A)*, 1991, A43(5): 2436~ 2445

## Pump Condition of Generating Sub-Poissonian Distribution through Single-Mode Laser

Yang Ming    Cao Li    Wu Dajin

(Department of Physics and National Laboratory of Laser Technology,  
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Li Zaiguang

(National Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 16 September 1996, revised 22 January 1997)

**Abstract** The Mandel factor for the single-mode laser field is derived analytically, and the pump condition for generating sub-Poissonian distribution is given based on above results.

**Key words** sub-Poissonian distribution, single-mode laser, Mandel factor.