第 17 卷 第 12 期 光 学 学 报 Vol. 17, No. 12
1997 年 12 月 ACTA OPTICA SINICA December, 1997

参数化玻色湮灭算符高次幂的本征态及其量子起伏规律

韩士杰 时维春
(东北林业大学物理系, 哈尔滨 150040)
郝 春 马爱群
(黑龙江大学物理系, 哈尔滨 150080) (哈尔滨大学, 哈尔滨 150020)

摘 要 以参数化方式 $[y]=(q^y-1)/(q-1)$ 定义 q 玻色湮灭算符 a_q, 生成相应的 q 相干态, 找出能产生并保持这类 q 相干态的体系的哈密顿量。研究 $a_q^k(k\geqslant1)$ 的正交归一本征态的数学结构和量子起伏性质, 发现这些本征态中只有偶 q 相干态存在通常的压缩效应, 并且当 $q<1$ 时, 场的两个正交分量在各态中的量子起伏可以同时有小于相干态的最小不确定度(1/4), 有 q 压缩效应。

关键词 玻色湮灭算符, 本征态, 量子起伏。

1 引 言

1989 年, Biedenharn[1] 最先将具有李群结构的相干态推广至具有量子群结构的量子代数的相干态一 q 相干态。此后, q 相干态受到学者们的关注[2~8], 在物理学许多分支领域和数学物理方面展现出广泛的应用前景; 将奇偶相干态与量子群联系起来得到的量子代数的奇偶相干态一奇偶 q 相干态[9, 10] 也有重要意义, 发现奇偶 q 相干态的非经典特性明显地受参数 q 影响[10], 表明用量子群研究光场会更深入地揭示光场的性质; Chaturvedi[11] 在讨论单模谐振子一般对易关系时定义了一种新的参数化符号, $n_q=(1-q^n)/(1-q)$, 以这种新的参数化方式, 所得到奇偶 q 相干态[12] 的非经典特性更明显地受参数 q 影响: 当 $q<1$ 时, 以新参数化方式得到的 q 玻色湮灭算符的实部和虚部算符在这些态中的量子起伏可以同时小于相干态的最小不确定度(1/4), 具有 q 压缩特性。

本文将找出能产生并保持新 q 相干态的体系, 更一般给出新 q 玻色湮灭算符 k 次方 a_q^k 的本征态在福克(Fock) 表象和相干态表象中的两种数学表述形式, 进而讨论这些量子代数光场态的量子起伏性质。

2 参数化玻色湮灭算符及其本征态

首先, 用记号 $[y]$ 表示[11]

收稿日期: 1996 年 12 月 29 日; 收到修改稿日期: 1997 年 8 月 12 日

$$[y] = (q^y - 1)/(q - 1) = (1 - q^y)/(1 - q), \tag{1}$$

式中 q 是非负实数。当 $q = 1$ 时, $[y] = y$。(1) 式定义了新的参数化方式。

用新的参数化方式, 文献[11]定义的参数化的玻色湮灭算符和产生算符为

$$a_q = a\sqrt{[N]/N} = \sqrt{[N+1]/(N+1)}\,a,$$
$$a_q^+ = \sqrt{[N]/N}\,a^+ = a^+\sqrt{[N+1]/(N+1)}, \tag{2}$$

式中 $N = a^+ a$, 为粒子数算符, 可见(2) 式与原来的 a_q 和 a_q^+ 的定义形式相同。显然, $a_q^+ a_q = \sqrt{[N]/N}\,a^+ a\sqrt{[N]/N} = [N]$, 称为粒子数强度算符, 记为 N_q。

a_q 和 a_q^+ 的对易关系为

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = 1, \tag{3}$$

或

$$[a_q, a_q^+] = [N+1] - [N] = (q-1)a_q^+ a_q + 1 \tag{4}$$

N 与 a_q 和 a_q^+ 的对易关系为

$$[N, a_q] = -a_q, \qquad [N, a_q^+] = a_q^+ \tag{5}$$

将 a_q、a_q^+ 和 $N_q = [N] = a_q^+ a_q$ 作用于福克态 $|n\rangle$ 上, 得

$$\left.\begin{aligned} &a_q|0\rangle = 0, \qquad a_q|n\rangle = \sqrt{[n]}|n-1\rangle, \qquad (n \geqslant 1),\\ &a_q^+|n\rangle = \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle, \qquad N_q|n\rangle = [n]|n\rangle \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

将谐振子系统用 q 参数变形, q 变形振子系统的哈密顿量为

$$H_q = \hbar\omega(a_q^+ a_q + 1/2) \tag{7}$$

福克态 $\{|n\rangle\}$ 也是 H_q 的本征态,

$$H_q|n\rangle = ([n] + 1/2)\hbar\omega|n\rangle \tag{8}$$

容易求得, a_q 的本征态为

$$|\alpha\rangle_q = (e_q^x)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{[n]!}}|n\rangle, \tag{9}$$

式中 α 是复参数, $\alpha = |\alpha|\exp(i\theta)$, $x = |\alpha|^2$, e_q^x 是 q 指数函数

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]!} \tag{10}$$

在本征态 $|\alpha\rangle_q$ 中, a_q 的本征值为 α,

$$a_q|\alpha\rangle_q = \alpha|\alpha\rangle_q \tag{11}$$

当 $q < 1$ 时, 级数(10) 式在 α 复平面上 $|\alpha| < (1-q)^{-1/2}$ 的圆域内收敛, 在圆域外发散, 故 e_q^x 和 $|\alpha\rangle_q$ 的定义域为 $|\alpha| < (1-q)^{-1/2}$ 的圆域。当 $q \geqslant 1$ 时, e_q^x 和 $|\alpha\rangle_q$ 的定义域为全部 α 复平面。$|\alpha\rangle_q$ 是相干态 $|\alpha\rangle$ 的 q 变形态, 称之为 q 相干态。

下面, 求产生和保持 q 相干态的体系的哈密顿量。假定能量本征值为 $\hbar\omega/2$, 令

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-i\omega t/2)|\alpha\rangle_q, \qquad H_\alpha = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}C_{m,l}(N)\,a_q^{+m}a_q^m, \tag{12}$$

式中 ω、α 均为常数, H_α 是厄米的, $H_\alpha^+ = H_\alpha$。将(12) 式代入体系的薛定谔方程或定态薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H_\alpha|\Psi(t)\rangle, \qquad 或 \qquad H_\alpha|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|\Psi(t)\rangle, \tag{13}$$

利用(9) 式和 $H_\alpha^+ = H_\alpha$, 得体系的哈密顿量为

$$H_\alpha = \hbar\omega\{(a_q^+ a_q + 1/2) - (\alpha a_q^+ + \alpha^* a_q) + |\alpha|^2\}, \tag{14}$$

用上式描述的体系是一个 q 变形谐振子与驱动场相互作用的体系。式中第一部分为 q 振子哈密顿量，第二部分为 q 振子与驱动场相互作用哈密顿量，第三部分为驱动场哈密顿量。

$$H_\alpha|\alpha\rangle_q = \frac{1}{2}\hbar\omega|\alpha\rangle_q$$

哈密顿量为 H_α 的体系能保持 a_q 的本征值为 α 的 q 相干态。

3 a_q^k 的本征态

q 玻色湮灭算符 $k(k \geqslant 1)$ 次方 a_q^k 的本征值为 α^k 的正交归一本征态(k 重简并态) 在福克表象中的形式为

$$|\Psi_j\rangle_k = C_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{kn+j}}{\sqrt{[kn+j]!}}|kn+j\rangle, \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, k-1) \tag{15}$$

令 $C_j = A_j^{-1/2}$，$x = |\alpha|^2$

$$A_j = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{kn+j}}{[kn+j]!} \tag{16}$$

可以看到，a_q^k 的正交归一本征态并未因定义新的参数化方式而改变，其数学表示与匡乐满等[13] 所给出的结果相同，因而其特性也与文献[12] 中的讨论类似。

a_q^k的正交归一本征态的 q 相干态的展开形式为

$$|\Psi_j\rangle_k = \frac{1}{k}C_j\sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{l=0}^{k-1}\exp\left[i\frac{2\pi}{k}l(n-j)\right]\}\frac{\alpha^n}{\sqrt{[n]!}}|n\rangle \tag{17}$$

A_j 也可以写作

$$A_j = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\exp_q\{x\exp(i\frac{2\pi}{k}l)\}\exp(-i\frac{2\pi}{k}jl) \tag{18}$$

应该指出 a_q^k的正交归一本征态系不是唯一的，对$\{|\Psi_j\rangle_k\}$ 进行 SU(k) 变换，

$$\begin{pmatrix} |\varphi_0\rangle_k \\ |\varphi_1\rangle_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ |\varphi_{k-1}\rangle_k \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} |\Psi_0\rangle_k \\ |\Psi_1\rangle_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ |\Psi_{k-1}\rangle_k \end{pmatrix}, \tag{19}$$

式中 U 为 $k \times k$ 么模么正矩阵，

$$U^+U = UU^+ = I, \qquad \det U = 1, \tag{20}$$

$|\varphi_j\rangle_k$ 也是 a_q^k的本征值为 α^k 的 k 重简并的正交归一本征态。本文仅限于讨论$\{|\Psi_j\rangle_k\}$ 的性质。

1) a_q 的作用而相互转换的性质

$$a_q|\Psi_0\rangle_k = \alpha C_0 C_{k-1}^{-1}|\Psi_{k-1}\rangle_k, \qquad a_q|\Psi_j\rangle_k = \alpha C_j C_{j-1}^{-1}|\Psi_{j-1}\rangle_k, \qquad (j \geqslant 1) \tag{21}$$

2) 正交性

$${}_k\langle\Psi_j(\alpha)|\Psi_{j'}(\alpha)\rangle_k = \delta_{jj'}, \tag{22}$$

即属于同一本征值的 a_q^k的本征态是正交归一的。

$${}_k\langle\Psi_j(\alpha)|\Psi_{j'}(\alpha')\rangle_k = \frac{1}{k^2}(e_q^x e_q^{x'})^{1/2}C_j(\alpha)C_j(\alpha')$$

$$\times \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{l'=0}^{k-1} \exp\{i\frac{2\pi}{k}(jl-j'l')\}\exp_q\{\alpha^*\alpha'\exp[i\frac{2\pi}{k}(l'-l)]\}\neq 0, \tag{23}$$

即属于不同本征值的 $a_q{}^k$ 的本征态不正交。

3) 完备性

$a_q{}^k$ 的本征态 $\{|\Psi_j(\alpha)\rangle_k\}$ 构成一个完备集, 其完备性表示为

$$\frac{1}{2\pi}\int\sum_{j=0}^{k-1}A_j|\Psi_j(\alpha)\rangle_{kk}\langle\Psi_j(\alpha)|\exp_q(-x)\,d_qx\,d\theta = I \tag{24}$$

上式证明过程如下:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int\sum_{j=0}^{k-1}A_j|\Psi_j(\alpha)\rangle_{kk}\langle\Psi_j(\alpha)|\exp_q(-x)\,d_qx\,d\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n,m}\frac{\alpha^{kn+j}\alpha^{*\,km+j}}{\sqrt{[kn+j]![km+j]!}}|kn+j\rangle\langle km+j|\exp_q(-x)\,d_qx\,d\theta\\
&=\int\sum_{j=0}^{k-1}\sum_n\frac{x^{kn+j}}{[kn+j]!}|kn+j\rangle\langle kn+j|\exp_q(-x)\,d_qx\\
&=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_n|kn+j\rangle\langle kn+j| = I\end{aligned}$$

4　量子起伏性质

表示 q 场的两个正交分量的算符为

$$X_1=(a_q{}^++a_q)/2,\qquad X_2=i(a_q{}^+-a_q)/2 \tag{25}$$

X_1 和 X_2 是厄米算符。利用(4) 式, 得 X_1 和 X_2 的对易关系为

$$[X_1, X_2]=i[a_q, a_q{}^+]/2=i\{(q-1)a_q{}^+a_q+1\}/2 \tag{26}$$

从而有不确定关系

$$\{\langle(\Delta X_1)^2\rangle\langle(\Delta X_2)^2\rangle\}^{1/2}\geqslant\frac{1}{4}\langle\{(q-1)a_q{}^+a_q+1\}\rangle \tag{27}$$

以 $D_k{}^j(x)$ 表示 X_1 和 X_2 在 $|\Psi_j\rangle_k$ 中的最小不确定度, 利用转换关系(21) 式有

$$\begin{aligned}D_k{}^j(x)&=(1/4)_k\langle\Psi_j|(q-1)a_q{}^+a_q+1|\Psi_j\rangle_k\\
&=[(q-1)xA_{lk+j-1}/A_j+1]/4\end{aligned} \tag{28}$$

式中, $j=0$ 时, $l=1$, $j\neq 0$ 时, $l=0$。由(28)式可知:

1) 当 $q=1$ 时, $D_k{}^j(x)=1/4$, 与 x 无关。此时 $|\Psi_j\rangle_k$ 即为 a^k 的本征态。

2) 当 $q>1$ 时, 由于 $x\geqslant 0$, $A_j\geqslant 0$, 故 $D_k{}^j(0)\geqslant 1/4$。

3) 当 $q<1$ 时, 由于 $x\geqslant 0$, $A_j\geqslant 0$, 并且在 $0\leqslant x<(1-q)^{-1}$ 范围内, $D_k{}^j(x)$ 非负, 而有

$$0<D_k{}^j(x)\leqslant 1/4 \tag{29}$$

例如, $D_1{}^0(0)=1/4$, $\lim\limits_{x\to(1-q)^{-1}}D_1{}^0(x)=0$。

当 $q<1$ 时, 最小不确定度可以小于1/4, 甚至接近于0, 是一件令人兴奋的事情。它将导致一对共轭量 X_1 和 X_2 可以同时有小于 1/4 的量子起伏, 而不违背不确定关系。出现这种情况的动力学原因是驱动场是一个参数化场, 而运动学原因参数化的结果使 $|\Psi_j\rangle_k$ 的定义域为 α 复平面上 $|\alpha|<(1-q)^{-1/2}$ 的圆域内。

X_1 和 X_2 在各个 $\{|\Psi_j\rangle_k\}$ 态中的量子起伏为:

1) 当 $k=1$ 时, $|\Psi_0\rangle_1=|\alpha\rangle_q$,

$$_q\langle\alpha|(\Delta X_1)^2|\alpha\rangle_q={}_q\langle\alpha|(\Delta X_2)^2|\alpha\rangle_q=D_1^0(x) \tag{30}$$

即 $|\alpha\rangle_q$ 是 X_1 和 X_2 的最小不确定态。但是, 由于 $D_1^0(x)=[(q-1)x+1]/4$, 当 $q<1$ 时, 而有 $0<D_1^0(x)\leqslant 1/4$。这意味着 X_1 和 X_2 在 q 相干态中量子起伏小于相干态的量子起伏 (1/4), 特别是 $x\to(1-q)^{-1}$ 时, X_1 和 X_2 在 q 相干态中的量子起伏趋于 0, 场的两个正交分量的量子起伏可以同时小于相干态的最小不确定值 (1/4)。由于参数化的结果而导致的量子起伏小于相干态的量子起伏 (1/4) 也是一种压缩, 称为 q 压缩。q 相干态存在 X_1 和 X_2 的等量压缩。其最大压缩量 (1/4 减去 X_1 或 X_2 的量子起伏) 接近 1/4, 最大压缩度 (压缩量与 1/4 之比) 接近 1 。这是一种相当理想的压缩。

2) 当 $k=2$ 时,

$$|\Psi_0\rangle_2=(e_q^{-x}\,\mathrm{ch}_q x)^{-1/2}(|\alpha\rangle_q+|-\alpha\rangle_q)/2,\qquad |\Psi_1\rangle_2=(e_q^{-x}\,\mathrm{sh}_q x)^{-1/2}(|\alpha\rangle_q-|-\alpha\rangle_q)/2, \tag{31}$$

分别称为偶 q 相干态和奇 q 相干态, $|\Psi_0\rangle_2=|\alpha\rangle_q^e$, $|\Psi_1\rangle_2=|\alpha\rangle_q^0$。计算得

$$\begin{aligned} {}_q^e\langle\alpha|(\Delta X_1)^2|\alpha\rangle_q^e &= D_2^0+(x/2)(\mathrm{th}_q x+\cos2\theta),\\ {}_q^e\langle\alpha|(\Delta X_2)^2|\alpha\rangle_q^e &= D_2^0+(x/2)(\mathrm{th}_q x-\cos2\theta), \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} {}_q^0\langle\alpha|(\Delta X_1)^2|\alpha\rangle_q^0 &= D_2^1+(x/2)(\mathrm{cth}_q x+\cos2\theta),\\ {}_q^0\langle\alpha|(\Delta X_2)^2|\alpha\rangle_q^0 &= D_2^1+(x/2)(\mathrm{cth}_q x-\cos2\theta), \end{aligned} \tag{33}$$

式中

$$\mathrm{th}_q x=(e_q^x-e_q^{-x})/(e_q^x+e_q^{-x}),\qquad \mathrm{cth}_q x=(e_q^x+e_q^{-x})/(e_q^x-e_q^{-x}) \tag{34}$$

由 (32) 式和 (33) 式看出, 在奇、偶 q 相干态中, 场的两个正交分量 X_1 和 X_2 都是不等起伏。起伏包括两项: 最小不确定度项和附加起伏项。e_q^{-x} 是交错级数, 其倒数 $(e_q^{-x})^{-1}$ 是正项级数,

$$(e_q^{-x})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n-1)/2}}{[n]!}x^n \tag{35}$$

因 $x\geqslant 0$, 故 $(e_q^{-x})^{-1}$ 和 e_q^{-x} 非负。而有 $0\leqslant\mathrm{th}_q x\leqslant 1$, $\mathrm{cth}_q\geqslant 1$ 。因此奇 q 相干态不存在通常的压缩, 而偶 q 相干态存在通常的压缩。压缩出现在附加起伏项为负的区域, 即压缩区为

$$\text{对 } X_1 \text{ 分量: } \mathrm{th}_q x+\cos2\theta<0,\qquad \text{对 } X_2 \text{ 分量: } \mathrm{th}_q x-\cos2\theta<0 \tag{36}$$

由 (36) 式看出, X_1 和 X_2 的压缩区不重迭, 即偶 q 相干态不能同时有场的两个正交分量 X_1 和 X_2 的压缩。应当指出, 当 $q<1$ 时, 奇偶 q 相干态都存在 q 压缩。

3) 当 $k\geqslant 2$ 时,

$$_k\langle\Psi_j|(\Delta X_1)^2|\Psi_j\rangle_k={}_k\langle\Psi_j|(\Delta X_2)^2|\Psi_j\rangle_k=D_k^j+A_{lk+j-1}x/2A_j \tag{37}$$

式中, $j=0$ 时, $l=1$; $j\neq 0$ 时, $l=0$。(37) 式表明 X_1 和 X_2 在 $a_q^k(k\geqslant 2)$ 的同一本征态中是 等起伏的, 含两部分: 最小测不准值项和非负的附加起伏项。此种情况, 不存在通常的压缩。但是, 当 $q<1$ 时, a_q^k 的本征态却可以存在 q 压缩。

结　论　用参数化方法实现算符和场态的形变, 进而研究光场的性质, 是一个有效的理论方法。本文通过新的 q 参数化方式得到了 q 玻色湮灭算符及其本征态— q 相干态。q 相干态可以由驱动场与 q 振子场的相互作用的体系来产生和保持。

q 玻色湮灭算符各次幂的本征态中只有偶相干态存在通常的非经典压缩效应。但是, 当参数 $q<1$ 时, 这些本征态都存在 q 压缩效应。q 压缩是一种独立的压缩效应。q 压缩可以实现

最大的压缩。此时，场分量的量子起伏趋于零。对于 q 相干态，场的两个正交分量的 q 压缩是等量压缩，两个分量的量子起伏可以同时小于相干态的最小不确定度(1/4)。

参 考 文 献

[1] L. C. Biedenharn, The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators. *J. Phys. (A). Math and Gen.*, 1989, **22**(17):L873~878

[2] C. P. Sun, H. C. Fu, The q-deformed boson relization of the quantum group $SU_q(2)$ and its representation. *J. Phys. (A)*, 1989, **22**(21):L983~986

[3] M. Chaichian, D. Ellinas, P. Kullish, Quantum algebra as the dynamical symmetry of the deformoved Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(8):980~983

[4] C. Quesne, Coherent states, K-matrix theory and q-boson realizations of the quantum algebra $SU_q(2)$. *Phys. Lett. (A)*, 1991, **153**(6, 7):303~307

[5] L. M. Kuang, F. B. Wang, The $SU_q(1, 1)$ q-coherent sates and their nonclassc properties. *Phys. Lett. (A)*, 1993, **173**(3):221~227

[6] L. M. Kuang, The q-supercoherent sates of the q-deformed SU(2). *J. Phys. (A)*, 1992, **25**(18):4827~4833

[7] 郝三如, 利用 $SU_q(2)$ 量子代数的 q 变形谐振子实现讨论 $SU_q(2)$ 相干态. 物理学报, 1993, **42**(5):691~698

[8] 郝三如, q 变形量子振子的 Glanber 相干态. 物理学报, 1993, **42**(7):1057~1062

[9] 匡乐满, 王发伯, 曾高坚, 偶奇相干态的 q 类比. 光学学报, 1993, **13**(**11**):**1008**~**1011**

[**10**] 朱从旭, 王发伯, 匡乐满, 关于奇偶 q 相干态的非经典特性. 物理学报, **1994**, **43**(8):1262~1267

[11] S. Chaturved, A. K. Kapoor, V. Srinivasan, Generalized commutation relations for a single-mode oscillator. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **43**(8):4555~4557

[12] 郝 春, 时维春, 马爱群等, 第二类奇偶 q 相干态及其性质. 光子学报, 1996, **25**(7):598~604

[13] Le-Man Kuang, Fa-Bo Wang, Gao-Jian Zeng, The k-component q-coherent state representations of the quantum Heisenberg-Weyl algebra, *Phys. Lett. (A)*, 1993, **176**(1, 2):1~5

The Eigenstates of High Power of Parametrization Boson Annihilation Operator and Their Quantum Fluctuation Law

Han Shijie　　Shi Weichun
(*Department of Physics, Northeast Forestry University, Harbin* 150040)
Hao Chun　　　　Ma Aiqun
(*Department of Physics, Heilongjiang University, Harbin* 150080)　(*Harbin College, Harbin* 150020)

(Received 29 December 1996; revised 12 August 1997)

Abstract By using a new parametrization way, $[y] = (q^y - 1)/(q - 1)$, the q Boson annihilation operator was defined, and a new q coherent state was constructed. The system Hamiltonian that can produce and maintain the q coherent state was found. We studied the mathematical construction and the quantum fluctuation characteristic of the orthonormalization eigenstates of $a_q^k (k \geqslant 1)$. It is found that the only even q coherent states have usual squeezing effect, and when the parameter $q < 1$, the quantum fluctuation of both quadrature components of the field for each state may be simultaneouly smaller than the minimum uncertainly value (1/4) of the coherent state. These eigenstates have q squeezing.

Key words Boson annihilation operator, eigenstate, quantum fluctuation.