

改进 WKB 近似的新方法*

曹庄琪 詹黎 陈英礼

(上海交通大学应用物理系, 上海 200030)

摘 要 利用转移矩阵理论, 在考虑层间一次反射和转折点处实际相移的基础上, 导出了改进的 WKB 公式, 数值计算的结果表明本文所得公式的精度远优于传统的 WKB 近似, 而且能适用于接近于截止的模式和变化剧烈的折射率分布。

关键词 非均匀波导, WKB 方程。

1 引 言

WKB 近似是计算非均匀平板光波导导模传播常数的常用方法, 但该方法只有在缓变折射率和波导线度远大于光波长的情况下, 才能给出合理的精度。作者曾指出^[1], WKB 方法的局限性在于它忽略了折射率梯度的层间反射, 并简单地用 $\pi/2$ 作为转折点处的全反射相移。针对以上两点, 提出了改进的方法^[1, 2], 得到了高精度的公式, 但所得公式是以递推形式出现的, 失去了 WKB 近似的简洁和物理意义清晰的特点。近年来, 也有一些研究人员对改进 WKB 近似作了相应的努力^[3, 4], 但都没有得到一个类似 WKB 近似的简明公式, 因此难以推广应用。

本文把非均匀光波导看成是一个折射率梯度变化的无限多层膜结构, 利用转移矩阵理论, 导出了非均匀平板光波导递推形式的色散方程, 接着利用一阶近似, 导出了 WKB 近似忽略的层间一次反射对相位的贡献, 再根据等效衰减系数的概念, 确定了转折点处的实际相移为 π 。最后得到了改进的 WKB 公式。该公式同样具有简洁和物理意义清晰的特点, 通过对几种特定折射率分布的非均匀平板光波导的数值比较, 表明本文所得公式的精度远高于传统的 WKB 近似, 而且对接近于截止模式和变化剧烈的折射率分布, 同样能给出合理的精度。

2 色散方程的建立

考虑图 1 所示的任意折射率分布的非均匀平板光波导, 其中 n_0 、 n_2 分别为波导覆盖层和衬底的折射率, n_1 为波导表面的折射率, x_i 为转折点处的坐标。由于非均匀平板光波导可看成是折射率梯度变化的无限多层膜结构, 因此可方便地利用转移矩阵求解。

首先把区间 $[0, x]$ 分成 l 等分, 设每一小区域的宽度为 h , 于是有 $x_i = lh$, 显然当 $l \rightarrow \infty$,

* 上海市自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1996 年 6 月 16 日; 收到修改稿日期: 1997 年 1 月 30 日

$h \rightarrow 0$, 在只考虑 TE 模的情况下, 相应于第 i 个小区域的转移矩阵为^[1]

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos(k_i h) & - (1/k_i) \sin(k_i h) \\ k_i \sin(k_i h) & \cos(k_i h) \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (1)$$

式中

$$k_i = (k_0^2 n_i^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (2)$$

β 为光波纵向传播常数, 在转折点处, 有 $\beta = k_0 n(x_i)$, $k_0 = \omega/c$ 为自由空间传播常数, 其中 ω 为光波的角频率, c 为自由空间光速。

利用 $x = 0$ 和 $x = x_l$ 处的边界条件, 可以得到以下矩阵方程

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ E_y'(0) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^l M_i \begin{bmatrix} E_y(x_l) \\ E_y'(x_l) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 $E_y(0)$ 、 $E_y(x)$ 分别为 TE 模 $x = 0$ 和 $x = x_l$ 处的电场分布, “ $'$ ”表示对 x 的导数, 对图 1 所示的平板光波导, 容易知道, 在 $x < 0$ 区域, 电场分布是指数衰减函数, 即有

$$E_y(x) = A_0 \exp(P_0 x) \quad (4)$$

式中 A_0 为待定系数, 而衰减系数

$$P_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \quad (5)$$

对于 $x > x_l$ 区域的光场, 根据光波导理论可知, 一定是衰减的, 但以何种形式衰减缺与具体的折射率分布有关, 在这里, 用一等效的指数衰减场来代替实际的衰减场, 即有

$$E_y(x_l) = A_l \exp[P_l(x - x_l)] \quad (6)$$

式中 A_l 也为待定系数, 而 P_l 为等效衰减系数。

利用(4)、(6)两式, (3)式可写成如下形式

$$(-P_0 \quad 1) M_1 M_2 \dots M_l \begin{bmatrix} 1 \\ -P_l \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

利用(1)式, 化简(7)式, 可得

$$k_l = m\pi + \text{tg}^{-1}(P_0/k_0) + \text{tg}^{-1}(P_l/k_l), \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots) \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} P_i &= k_i \text{tg} [\text{tg}^{-1}(P_{i+1}/k_i) - k_i h], \quad (i = 2, 3, \dots, l) \\ P_{l+1} &= P(x_l) \end{aligned} \quad (9)$$

3 层间反射的考虑

对渐变折射率分布, 相邻两层折射率的相对变化可以作为小量, 因此在一阶近似下, (8)式右边第三项可作以下变换:

$$\begin{aligned} \text{tg}^{-1}(P_l/k_l) &= \text{tg}^{-1}\{(k_2/k_1) \text{tg} [\text{tg}^{-1}(P_3/k_2) - k_2 h]\} \\ &= \text{tg}^{-1}\{[1 - (k_1 - k_2)/k_1] \text{tg} [\text{tg}^{-1}(P_3/k_2) - k_2 h]\} \\ &\approx \text{tg}^{-1}(P_3/k_2) - k_2 h - [(k_1 - k_2)/2k_1] \sin 2[\text{tg}^{-1}(P_3/k_2) - k_2 h] \end{aligned}$$

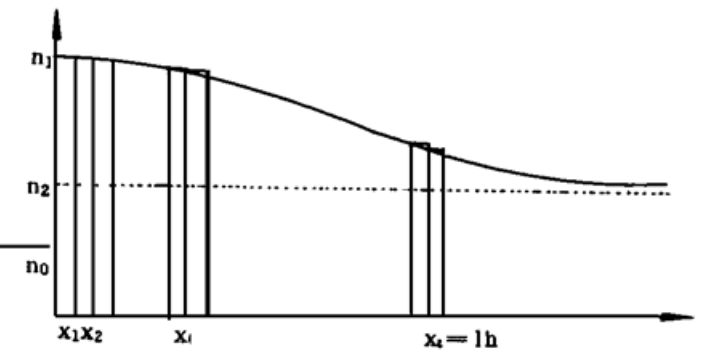


Fig. 1 Plot of planar waveguides with arbitrary refractive index profile

同理可得

$$\begin{aligned} \text{tg}^{-1}(P_3/k_2) &\approx \text{tg}^{-1}(P_4/k_3) - k_3h - [(k_2 - k_3)/2k_2] \sin 2[\text{tg}^{-1}(P_4/k_3) - k_3h] \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

$$\text{tg}^{-1}(P_1/k_{l-1}) \approx \text{tg}^{-1}(P_{l+1}/k_l) - k_lh - [(k_{l-1} - k_l)/2k_{l-1}] \sin 2[\text{tg}^{-1}(P_{l+1}/k_l) - k_lh]$$

把以上诸式相加, 可得

$$\text{tg}^{-1} \frac{P_2}{k_1} \approx \text{tg}^{-1} \frac{P_{l+1}}{k_l} - \sum_{i=2}^l k_i h - \sum_{i=2}^l \frac{k_{i-1} - k_i}{2k_{i-1}} \sin 2[\text{tg}^{-1} \frac{P_{i+1}}{k_i} - k_i h] \quad (10)$$

于是(8)式变为

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^l k_i h + \sum_{i=2}^l \frac{k_{i-1} - k_i}{2k_{i-1}} \sin 2[\text{tg}^{-1} \frac{P_{i+1}}{k_i} - k_i h] &= m\pi + \text{tg}^{-1} \frac{P_0}{K_l} + \text{tg}^{-1} \frac{P_{l+1}}{k_l} \\ (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (11)$$

令

$$\Phi(r) = \sum_{i=2}^l \frac{k_{i-1} - k_i}{2k_{i-1}} \sin 2[\text{tg}^{-1} \frac{P_{i+1}}{k_i} - k_i h] \quad (12)$$

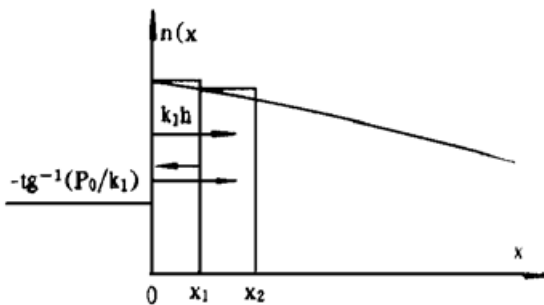
显然 $\Phi(r)$ 是多个一阶小量的叠加, 为看清各项的物理意义, 对正弦函数的宗量作以下近似代换, 即有

$$\begin{aligned} \text{tg}^{-1}(P_{i+1}/k_i) - k_i h &\approx m\pi + \sum_{j=1}^{i-1} k_j h - \text{tg}^{-1}(P_0/k_1) \\ (i = 1, 2, \dots, l; m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (13)$$

于是, (12)式变为

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= [(k_1 - k_2)/2k_1] \sin 2[k_1 h - \text{tg}^{-1}(P_0/k_1)] \\ &+ [(k_{2l} - k_3)/2k_2] \sin 2[(k_1 + k_2)h \\ &- \text{tg}^{-1}(P_0/k_1)] \\ &\dots\dots \\ &+ [(k_{l-1} - k_l)/2k_{l-1}] \sin 2[(k_1 + k_2 + \dots \\ &+ k_{l-1})h - \text{tg}^{-1}(P_0/k_1)] \\ &\equiv \sum_{i=2}^l \frac{k_{i-1} - k_i}{2k_{i-1}} \sin 2[\sum_{j=1}^i k_j h - \text{tg}^{-1} \frac{P_0}{k_1}] \end{aligned} \quad (14)$$

Fig. 2 Schematic diagram of the phase variation suffered by the first order reflective wave at x_1



代换(13)式的物理意义表明: 作者仅考虑了一次反射波对位相的贡献, 高次反射波的影响已全部忽略。

若把(14)式各项的系数近似为 $(k_{i-1} - k_i)/(k_{i-1} + k_i)$, 则容易看出, 该系数即为反射系数, 而由图 2 可知, 正弦函数的宗量正好是一次反射波经历的位相变化。由此可见, $\Phi(r)$ 即是层间一次反射波对主波位相的贡献。

4 转折点处的全反射相移

由(12)式可知, 转折点处的相移为 $2 \text{tg}^{-1}(P_{l+1}/k_l)$, 若采用等效衰减系数的概念则有

$$\text{tg}^{-1}(P_{l+1}/k_l) \equiv \text{tg}^{-1}(P_l/k_l) \quad (15)$$

即对转折点处某种形式的衰减场, 用一衰减系数为 P_l 的指数衰减场来近似, 因而 P_l 一定是一个正的有限数, 而当 $l \rightarrow \infty$ 时, 即有 $k_l = 0$, 由(15)式可知

$$\text{tg}^{-1}(P_l/k_l) = \pi/2 \quad (16)$$

在这里, 不需要确定 P_i 的大小, 就可知道该方法下转折点处的全反射相移为 π 。

于是, 根据(14)和(16)两式, 可得到改进的 WKB 方程:

$$\int_0^{x_t} k dx + \Phi(r) = m\pi + \text{tg}^{-1}(P_0/k_1) + \pi/2 \tag{17}$$

一次反射项 $\Phi(r)$ 当然也可写成积分形式, 但计算时并不方便, 故仍保留(14)式的形式。与传统的 WKB 方程比较, (17)式的左边增加了一次反射波对位相的贡献 $\Phi(r)$, 而在方程的右边用 $\pi/2$ 代替 $\pi/4$ 。

5 数值分析与比较

为检验改进的 WKB 方程的可靠性, 考虑以下三种典型的折射率分布。

指数分布:
$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \exp(-x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \tag{18}$$

高斯分布:
$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \exp(-x^2/d^2) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \tag{19}$$

余误差分布:
$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \text{erfc}(x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \tag{20}$$

定义归一化参数

$$v = kod(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}, \quad b = \frac{n_e^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad n_e = \beta/k_0 \tag{21}$$

并选取 $n_0 = 1.0$, $n_2 = 2.177$ 和 $n_1^2 - n_2^2 = 0.187$, d 作为 V 变化的参数, 由改进的 WKB 方程计算得到的 b 值与精确计算、WKB 近似以及 WKBJ 方法^[5]的比较由表 1、表 2 和表 3 给出。

Table 1. Exponential profile

V	exact	this paper		WKB		WKBJ	
	b	b	$\Delta b \times 10^{-3}$	b	$\Delta b \times 10^{-3}$	b	$\Delta b \times 10^{-3}$
1.5	0.035007	0.035230	6.4	0.037833	81.0	0.033736	36.3
2.0	0.104954	0.105353	3.8	0.108613	34.9	0.104009	9.0
2.5	0.171442	0.171786	2.0	0.175311	23.0	0.170974	2.7
3.0	0.229188	0.229394	0.9	0.233076	16.8	0.229120	0.3
3.5	0.278650	0.278678	0.1	0.282486	13.7	0.278894	0.9
4.0	0.321179	0.320986	0.6	0.324927	11.8	0.321656	1.5
5.0	0.390292	0.389822	1.2	0.393845	9.1	0.391083	2.0
6.0	0.444075	0.443453	1.4	0.447436	7.6	0.445051	2.2
7.0	0.487244	0.486454	1.6	0.490429	6.6	0.488330	2.2
8.0	0.522776	0.521895	1.7	0.525803	5.8	0.523924	2.2

Table 2. Gaussian profile

V	exact	this paper		WKB		WKBJ	
	b	b	$\Delta b \times 10^{-3}$	b	$\Delta b \times 10^{-3}$	b	$\Delta b \times 10^{-3}$
2.0	0.0817	0.0812	6.1	0.0453	445	0.0923	129.7
3.0	0.2750	0.2738	4.7	0.2538	77	0.2747	1.1
4.0	0.4133	0.4115	4.4	0.4008	30	0.4125	1.9

Table 3. Complementary error profile

V	exact	this paper		WKB		WKBJ	
	b	b	$\Delta b \times 10^{-3}$	b	$\Delta b \times 10^{-3}$	b	$\Delta b \times 10^{-3}$
3.0	0.0675	0.0670	7.4	0.0282	582	0.0784	161
4.0	0.1694	0.1685	5.3	0.1293	237	0.1678	9.4

从以上三表可以看出, 本文导出的方程确实改进了传统 WKB 方程的精确度, 尤其在 V 值较小时, WKB 近似已不再适用。尽管 WKBJ 方法在极大部分情况下, 有较高的精度, 和本文所给出的方法精度相当, 但在接近截止模式时, 不能有足够的精度, 而本文改进的 WKB 方程的精度却不受影响。

结 论 在考虑层间一次反射和转折点处全反射相移的基础上, 利用转移矩阵理论, 对传统的 WKB 近似进行了实质性的修改, 导出了改进的 WKB 方程。该方程不仅保留了原公式简洁和物理意义清晰的特点, 而且对接近截止的模式和变化剧烈的折射率分布, 仍能给出合理的精度。

参 考 文 献

- [1] 曹庄琪, 非均匀平板波导的色散方程. 光学学报, 1994, **14**(11): 1223~ 1226
- [2] 曹庄琪, 詹黎, 陈英礼, 渐变折射率光波导的精确分析. 光学学报, 1994, **14**(12): 1240~ 1243
- [3] Qiao Li, Jingyi Wang, A refined WKB method for planar waveguides with a symmetric graded-index profile. *Opt. Commun.*, 1991, **83**(1): 144~ 153
- [4] Feng Xiang, Gar Lam Yip, A modified WKB method for the improved phase shift at a turning point. *J. Lightwave Technol.*, 1994, **Lt-12**(3): 443~ 452
- [5] H. Ikuno, Analysis of wave propagation in inhomogeneous dielectric slab waveguides. *IEEE Trans on Micro. Theory and Tech.*, 1978, **MTT-26**(4): 261~ 266

An Improved Method of WKB Approximation

Cao Zhuangqi Zhan Li Chen Yingli

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University, 200030)

(Received 16 June 1996; revised 30 January 1997)

Abstract An improved WKB equation for inhomogeneous planar waveguides considering both the first-order reflections between layers and the real phase shift at a turning point has been developed by using the transfer matrix technique. The numerical comparison demonstrates the accuracy of our method. The improved WKB equation can also be applicable to the mode close to a turning point or a dramatic index variation waveguide.

Key words inhomogeneous waveguides, WKB equation.