

非旋波近似下 Ξ 型三能级哈密顿量的两能级简化*

杨国健 熊 俊 汪凯戈
(北京师范大学物理系, 北京 100875)

摘 要 讨论旋波近似和非旋波近似两种条件下 Ξ 型三能级系统哈密顿量的两能级简化及相关物理效应。

关键词 非旋波近似, 斯塔克移动。

用两能级近似下的有效哈密顿量处理多能级系统的双光子问题物理图像清晰、理论计算简洁, 但通常需作旋波近似假设^[1, 2]。这样做有不严之处。因为有效两能级近似要求原子的单光子失谐很大, 而此时原子中间能级远离共振状态, 原子与场相互作用中非旋波效应并非总是可以忽略。也有人从非旋波近似的角度讨论问题, 但都是从哈密顿量的原始形式出发展开的, 这样做不免引起复杂的理论计算^[3, 4]。本文寻找非旋波近似下的有效两能级哈密顿量。以 Ξ 型三能级系统为例, 讨论系统哈密顿量的两能级近似问题。近似的结果是: 在光场的作用下, 原子在其宇称相同的两个能级之间发生双光子转变, 而原子中间能级的影响转变成有效两能级原子的能级斯塔克移动, 非旋波效应加大了这种移动。系统的哈密顿量在两能级近似后大为简化, 它为今后简化这类与三能级乃至多能级系统相关的理论计算打下了基础。

1 模型及公式

图 1 为 Ξ 型三能级原子能级示意图。一个能级为 $|i\rangle (i=1, 2, 3)$ 的 Ξ 型三能级原子置于光学谐振腔中, 频率为 ω_1 和 ω_2 的两个原子能级转变 $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 和 $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 分别与频率为 Ω_1 和 Ω_2 的腔模耦合, 原子能级的衰变系数是 $\gamma_i (i=1, 2)$ 。设 $a_i (a_i^\dagger)$ 为第 i 个腔模算子, $A_{ij} = |i\rangle \langle j|$ 为原子算子, 可以写出系统的相互作用哈密顿量:

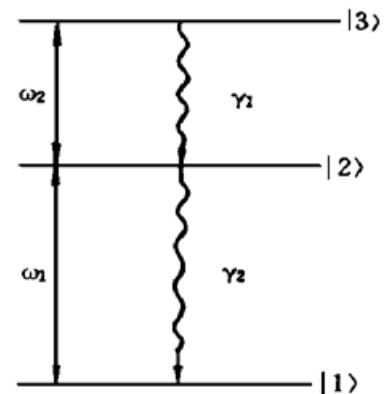


Fig. 1 Energy diagram for a three-level atom in a Ξ configuration

$$H = -\Delta_1 A_{11} + \Delta_2 A_{33} + \sum_{l=1}^2 g_l (A_{l, l+1} a_l^\dagger + A_{l+1, l} a_l) + \sum_{l=1}^2 g_l [A_{l, l+1} a_l \exp(-2i\Omega_l t) + A_{l+1, l} a_l^\dagger \exp(2i\Omega_l t)] \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助项目。

式中最后一项为原子与腔模相互作用中的非旋波效应部分, $\Delta_i = \omega_i - \Omega_i (i = 1, 2)$ 为原子单光子失谐, g_i 为耦合系数。(1) 式是系统哈密顿量在以 $\Omega_1(a_1^\dagger a_1 - A_{11}) + \Omega_2(a_2^\dagger a_2 + A_{33})$ 方式变换的旋转坐标系中的表达式, 并已假设 $\hbar = 1$ 。在半经典情况中, 若 A_{ij} 代表原子极化 ($i \neq j$) 和布居 ($i = j$), a_i 代表第 i 个复腔模, 另外再考虑腔模的损耗, 则不难写出系统的运动方程。

$$\begin{aligned} \dot{a}_l &= -k_l a_l - ig_l [A_{l, l+1} + A_{l+1, l} \exp(2i\Omega_l t)], \quad (l = 1, 2) \\ A_{12}^\circ &= - (r_1 + i\Delta_1) A_{12} - ig_1 (A_{11} - A_{22}) [a_1 + a_1^\circ \exp(2i\Omega_1 t)] - ig_2 A_{13} [a_2^\circ + a_2 \exp(-2i\Omega_2 t)], \\ A_{23}^\circ &= - (r_1 + r_2 + i\Delta_2) A_{23} + ig_1 A_{13} [a_1^\circ + a_1 \exp(-2i\Omega_1 t)] \\ &\quad - ig_2 (A_{22} - A_{33}) [a_2 + a_2^\circ \exp(2i\Omega_2 t)], \\ A_{13}^\circ &= - (r_2 + i\Delta) A_{13} + ig_1 A_{23} [a_1 + a_1^\circ \exp(2i\Omega_1 t)] - ig_2 A_{12} [a_2 + a_2^\circ \exp(2i\Omega_2 t)], \\ A_{11}^\circ &= 2r_1 A_{22} - ig_1 \{A_{12} [a_1^\circ + a_1 \exp(-2i\Omega_1 t)] - A_{21} [a_1 + a_1^\circ \exp(2i\Omega_1 t)]\}, \\ A_{33}^\circ &= - 2r_2 A_{33} - ig_2 \{A_{32} (a_2 + a_2^\circ \exp(2i\Omega_2 t)) - A_{23} [a_2^\circ + a_2 \exp(-2i\Omega_2 t)]\}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ 为原子双光子失谐, $k_i (i = 1, 2)$ 是腔模的弛豫系数。(2) 式因含时间相关指数因子而难以讨论。假设原子单光子失谐很大, 但保持近双光子共振, 因而原子中间能级可以消去。消去方法如下: 对(2)中第二式进行积分得:

$$\begin{aligned} A_{12}(t) &= -i \int_0^t dt' \exp[-(i\Delta_1 + r_1)(t - t')] [g_1 (A_{11} - A_{22}) a_1 + g_2 A_{13} a_2^\circ] \\ &\quad - ig_1 \int_0^t dt' \exp[-(i\Delta_1 + r_1 + 2i\Omega_1)(t - t')] (A_{11} - A_{22}) a_1^\circ \exp(2i\Omega_1 t) \\ &\quad - ig_2 \int_0^t dt' \exp[-(i\Delta_1 + r_1 - 2i\Omega_2)(t - t')] A_{13} a_2 \exp(-2i\Omega_2 t). \end{aligned} \quad (3)$$

该积分不能严格求解, 但考虑到系统变量在旋转坐标系中相对光频振荡是慢变化的, 所以, 在求(3)式时, 作为零级近似, 可以认为被积函数中除高频振荡的指数因子以外的系统变量与积分变量无关而被提到积分号外, (3)式得以近似求解。

同样求解 $A_{23}(t)$ 。再将求得的 $A_{12}(t)$ 和 $A_{23}(t)$ 及其共轭量代回(2)式, 略去频率为 $\pm \Omega_i$ 、 $\pm 2\Omega_i$ 、 $\Delta_i \pm 2\Omega_i$ 等高频振荡项, 最终得到一级近似下系统的动力学方程:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -k_1 a_1 - g_1^2 (A_{11} - A_{22}) a_1 \left[\frac{1}{i\Delta_1 + r_1} + \frac{1}{i(\Delta_1 + 2\Omega_1) - r_1} \right] - \frac{g_1 g_2 A_{13} a_2^\circ}{i\Delta_1 + r_1}, \\ \dot{a}_2 &= -k_2 a_2 - g_2^2 (A_{22} - A_{33}) a_2 \left[\frac{1}{i\Delta_2 + r_1 + r_2} + \frac{1}{i(\Delta_2 + 2\Omega_2) - (r_1 + r_2)} \right] + \frac{g_1 g_2 A_{13} a_1^\circ}{i\Delta_2 + r_1 + r_2}, \\ A_{13}^\circ &= - (i\Delta + r_2) A_{13} - \left\{ g_1^2 |a_1|^2 \left[\frac{1}{i\Delta_2 + r_1 + r_2} + \frac{1}{i(\Delta_2 - 2\Omega_2) + r_1 + r_2} \right] \right. \\ &\quad \left. + g_2^2 |a_2|^2 \left[\frac{1}{i\Delta_1 + r_1} + \frac{1}{i(\Delta_1 - 2\Omega_2) + r_1} \right] \right\} A_{13} + g_1 g_2 a_1 a_2 \left[\frac{A_{22} - A_{33}}{i\Delta_2 + r_1 + r_2} + \frac{A_{22} - A_{11}}{i\Delta_1 + r_1} \right], \\ A_{11}^\circ &= - 2r_1 A_{22} - 2g_1^2 |a_1|^2 r_1 \left[\frac{1}{\Delta_1^2 + r_1^2} + \frac{1}{(\Delta_1 + 2\Omega_1)^2 + r_1^2} \right] A_{11} - g_1 g_2^2 \left[\frac{A_{13} a_1^\circ a_2^\circ}{i\Delta_1 + r_1} + \frac{A_{31} a_1 a_2}{-i\Delta_1 + r_1} \right], \\ A_{33}^\circ &= - 2r_2 A_{33} - 2g_2^2 |a_2|^2 (r_1 + r_2) \left[\frac{1}{\Delta_2^2 + (r_1 + r_2)^2} + \frac{1}{(\Delta_2 + 2\Omega_2)^2 + (r_1 + r_2)^2} \right] A_{33} \\ &\quad - g_1 g_2^2 \left[\frac{A_{13} a_1^\circ a_2^\circ}{i\Delta_2 + r_1 + r_2} + \frac{A_{31} a_1 a_2}{-i\Delta_2 + r_1 + r_2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

因为原子中间能级远离共振状态,单光子作用不能激发原子在该能级上的布居,所以, $A_{22} = 0$ 。(4)式实际上描述的是两能级系统的运动情况。(4)式等号右边所有第二大项都是由于原子中间能级的存在而引发的,其中方括号中的两项分别来自原子与腔模相互作用中旋波效应和非旋波效应两部分,都有明显物理意义。例如在(4)式1、2两式中,该项实部反映了腔模的原子相关附加损耗,虚部则代表该腔模频率的原子相关移动;在(4)式第3式中,该项实部表示原子衰变的腔模强度相关修正,虚部则描写原子能级的腔模强度相关的动力学斯塔克移动。由此可见,由于中间能级的作用,使原本属于描述原子或腔模自身性质的诸如 r_i 、 Δ_i 和 k_i 等特征量现在变得相互相关。这正是一般两能级系统和有效两能级系统的区别所在。

因 $|\Delta_i|$ 较大,相比之下原子自发辐射影响较弱,所以可以作 $r_i \ll |\Delta_i|$ 的近似。另外,由近双光子共振条件得: $|\Delta| \ll |\Delta_i|$ 及 $\Delta_1 \approx -\Delta_2$, 最后(4)式简化为:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= -(k_l + i\theta_l)a_l - ig_1g_2A_{13}a_{3-l}^*/\Delta_l, & (l = 1, 2) \\ A_{13}^\circ &= -[r_\perp + i(\Delta + \Delta')]A_{13} - 2ig_1g_2A_3/\Delta_1 \\ A_3^\circ &= -\gamma_\parallel(1/2 + A_3) - (2ig_1g_2/\Delta_l)(A_{13}a_1^\dagger a_2^\dagger - A_{31}a_1a_2), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\theta_l = (-1)^l g_l^2 [1/(\omega - \Omega) + 1/(\omega + \Omega)] [(1/2) + (-1)^l A_3]$, $(l = 1, 2)$

$$\Delta' = \sum_{i=1}^2 g_i^2 |a_i|^2 [1/(\omega_i - \Omega) + 1/(\omega_i + \Omega)]. \quad (6)$$

(5)式中 $A_3 = (A_{33} - A_{11})/2$ 为有效两能级原子粒子数反转量, $r_\parallel (= 2r_2)$ 和 $r_\perp (= r_2)$ 分别为该原子在纯辐射情况下的纵、横向弛豫系数。(6)式中 θ_l 代表第 l 腔模的频移, Δ' 则反映了原子能级的动力学斯塔克移动。

2 讨 论

由(5)式、(6)式可以立即写出本文所寻找的有效两能级系统的哈密顿量^[1-2]:

$$H = \Delta A_3 + \beta_1 A_{11} a_1^\dagger a_1 + \beta_2 A_{33} A_2^\dagger a + ig(A_{13} a_1^\dagger a_2^\dagger - A_{31} a_1 a_2), \quad (7)$$

$$\beta_1 = \theta_1/(1/2 - A_3), \quad \beta_2 = \theta_2/(1/2 + A_3), \quad g = g_1g_2/\Delta_1. \quad (8)$$

其中 $\beta_i (i = 1, 2)$ 和 g 是原子能级斯塔克移动参数和原子-腔模双光子耦合系数。(7)式表明可以用旋波近似下的有效两能级系统来模拟非旋波近似下的三能级系统,但必须考虑由原来原子中间能级及其非共振反旋波效应所代来的有效两能级原子的能级斯塔克移动。与(1)式相比,显然(7)式大为简化。它还可以用来统一地描写原子-腔场不同形式的双光子作用。

2.1 旋波近似

β_i 定义式中只有第一项存在,它要求 $|\Delta_i|$ 大于但接近原子中间能级的自然线宽。这样既保证该能级不被激发,又可忽略非旋波效应的影响。由(6)式得到原子能级的斯塔克移动量:

$$\Delta' = g_1^2 a_1^\dagger a_1 / (\omega_1 - \Omega) + g_2^2 a_2^\dagger a_2 / (\omega_2 - \Omega). \quad (9)$$

可见 $\Delta' > 0$ 和 $\Delta' < 0$ 两种情况均可发生。

2.2 非旋波近似

β_i 定义式中两项均需保留,它要求 $|\Delta_i|$ 足够大以保证 $\omega - \Omega$ 与 $\omega + \Omega$ 为同一数量级。原子能级的斯塔克移动由(6)式给出,其中,由有效哈密顿量中的非旋波部分引发的斯塔克移动总大于零,即:

$$\Delta' = [a_1^\dagger a_1 / (\omega_1 + \Omega) + g_2^2 a_2^\dagger a_2 / (\omega_2 + \Omega)] \geq 0. \quad (10)$$

一般来说 $\omega - \Omega \gg \omega + \Omega$, 与旋波效应相比, 非旋波效应对斯塔克移动的影响常常被忽略。

2.3 无斯塔克移动 ($\Delta' = 0$)。

它可能出现在如下三种情况中:

1) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, 即回到一般的两能级双光子转变情况。

2) $\beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$, 旋波近似, 但需满足条件:

$$g_1^2 a_1^\dagger a_1 / (\omega_1 - \Omega_1) = - g_2^2 a_2^\dagger a_2 / (\omega_2 - \Omega_2). \quad (11)$$

3) $\beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$, 非旋波近似, 但需满足条件:

$$g_1^2 a_1^\dagger a_1 [1/(\omega_1 - \Omega_1) + 1/(\omega_1 + \Omega_1)] = - g_2^2 a_2^\dagger a_2 [1/(\omega_2 - \Omega_2) + 1/(\omega_2 + \Omega_2)]. \quad (12)$$

显然, 对于给定的 ω 和 Ω , 2) 和 3) 两种情况仅在腔模强度取某些特定值时才发生, 并且腔模频移总存在 ($\theta_i \neq 0$)。这一点与 1) 不同。它说明原子中间能级的作用无论如何消除不掉。

小结 1) 根据微扰论原理, 讨论了非旋转近似下的 Ξ 型三能级系统的两能级简化问题, 得到了形式简单的有效两能级系统的哈密顿量。

2) 分析了能级约化过程中出现的种种物理效应, 并根据有效哈密顿量研究了原子能级动力学斯塔克移动的规律。

原则上可以采用同样的方法将具有非共振中间能级的其它多能级原子系统的哈密顿量两能级化。不难想象, 其结果与现在的主要区别在动力学斯塔克移动参数上。以后的工作就是用这些简化的哈密顿量去处理具体问题。从目前关于双光子光学系统量子非破坏测量的讨论来看, 有效两能级近似效果很好, 而且理论计算大为简化。这方面的工作正在进行中。

参 考 文 献

- [1] R. R. Puri, R. K. Bullough, Quantum electrodynamics of an atom making two-photon transitions in an ideal cavity. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1988, **5**(10): 2021~ 2028
- [2] A. Sinatra, F. Castelli, L. A. Lugiato *et al.*, Effective two-level model versus three-level model. *Quantum & Semiclass. Opt.*, 1995, **7**(3): 405~ 421
- [3] P. Alsing, M. S. Zubairy, Collapse and revivals in a two-photon absorption process. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1987, **4**(2): 177~ 184
- [4] D. A. Holm, M. Sargent III, Theory of two-photon resonance fluorescence. *Opt. Lett.*, 1985, **10**(8): 405~ 407

Two-Level Reduction of a Ξ -Type Three-Level Hamiltonian without Rotating-Wave Approximation

Yang Guojian Xiong Jun Wang Kaige

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

(Received 5 July 1996; revised 26 September 1996)

Abstract The reduction of the Hamiltonian for a three-level atomic system in a Ξ configuration to an effective two-level one and the relative physical effects are discussed both with and without the rotating-wave approximation.

Key words nonrotating-wave approximation, Stark shift.