

# 双模 $SU(1, 1)$ 相干态场与级联三能级原子相互作用的动力学

赖云忠 周 伟

(太原重型机械学院基础部, 太原 030024)

**摘 要** 讨论了关联双模  $SU(1, 1)$  相干态场与级联三能级原子的相互作用对原子动力学行为的影响, 也研究了双模场的量子统计性质随时间的演化。通过数值计算, 发现了一些新的演化规律。

**关键词** 双模  $SU(1, 1)$  相干态, 级联三能级原子, 动力学特性。

## 1 引 言

由于 J-C 模型及其推广的 J-C 模型中场可展现某些非经典特性, 且场或原子的初始状态不同其非经典特征有很大的差异<sup>[1-3]</sup>。Lai<sup>[4]</sup>等研究了双模压缩真空态与  $\Lambda$  型三能级原子的相互作用, 发现能级失谐量  $\Delta$  的大小对原子和场的动力学特性有重要影响。文献[5]研究了双  $SU(1, 1)$  相干态场与 V 型三能级原子的共振相互作用, 结果表明, 原子与场的相互作用在上述两种模型中都不破坏两模间的关联。本文用数值计算分析双模  $SU(1, 1)$  相干态场<sup>[5]</sup>与中间能级失谐的级联三能级原子<sup>[6]</sup>的相互作用下原子能级占有几率随时间的演化规律及双模场的量子统计性质。作者发现, 与文献[5]不同, 双模  $SU(1, 1)$  相干态场与级联三能级原子的相互作用下两模之间存在反关联, 而且场的互关联函数随时间的演化特性显著地依赖于初始光场的强度。在弱场( $\zeta$ 较小) 情况下, 即使失谐量  $\Delta$  较大, 互关联函数也保持振荡而无崩溃回复现象。此结果显然不同于文献[6]所讨论的对相干态与级联三能级原子相互作用下互关联函数随时间的演化。文中具体分析了双模  $SU(1, 1)$  相干态参量  $\zeta$ 、失谐量  $\Delta$  和两模光子数之差  $q$  对原子的拉比(Rabi) 振荡的崩溃回复现象的影响及场的互关联函数随时间的演化特征。

## 2 描述系统的态函数

在旋波近似下, 级联三能级原子与双模场的相互作用哈密顿量可表示为<sup>[4,6]</sup>

$$H_I = \Delta R_{11} + g_1(a_1 R_{10} + R_{01} a_1^\dagger) + g_2(a_2 R_{21} + R_{12} a_2^\dagger) \quad (1)$$

式中  $R_{ij} = |i\rangle\langle j|$ ,  $|i\rangle$  ( $i = 0, 1, 2$ ) 为原子对应于频率为  $\omega$  的本征态;  $a_i$  和  $a_i^\dagger$  分别为频率为  $\nu_i$  的场的湮灭和产生算符;  $g_i$  为耦合常数, 本文取为实数;  $\Delta$  为场模与原子中间能级的失谐量。

设  $t = 0$  时, 原子处在激发态  $|2\rangle$ , 而光场处于双模  $SU(1, 1)$  相干态<sup>[5]</sup>

$$|\zeta q\rangle = (1 - |\zeta|^2)^{(1+q)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} \zeta |n+q, n\rangle \tag{2}$$

式中  $q$  为两模光子数之差。随时间演化, 在相互作用表象中, 系统在  $t > 0$  时刻的态矢可示为

$$|\Psi_I(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} F_n [B_2(n, t) |2, n+q, n\rangle + B_1(n, t) |1, n+q, n+1\rangle + B_0(n, t) |0, n+q+1, n+1\rangle] \tag{3}$$

其中

$$F_n = (1 - |\zeta|^2)^{(1+q)/2} \left[ \frac{(n+q)!}{n!q!} \right]^{1/2} \zeta \tag{4}$$

利用相互作用表象中的薛定谔方程及初始条件<sup>[6]</sup>

$$B_0(n, 0) = B_1(n, 0) = 0, \quad B_2(n, 0) = 1 \tag{5}$$

可得

$$\begin{aligned} B_0(n, t) &= (\Omega_{1n}\Omega_{2n}/\Omega_{3n}^2) \{ [\cos\beta nt + (i\delta/\beta_n)\sin\beta nt] \exp(-i\delta t) - 1 \}, \\ B_1(n, t) &= -i(\Omega_{2n}/\beta_n) \sin\beta nt \exp(-i\delta t), \\ B_2(n, t) &= (\Omega_{1n}^2/\Omega_{3n}^2) + (\Omega_{2n}^2/\Omega_{3n}^2) [\cos\beta nt + i(\delta/\beta_n)\sin\beta nt] \exp(-i\delta t) \end{aligned} \tag{6}$$

式中  $\Omega_{1n} = g_1 \sqrt{n+q+1}$ ,  $\Omega_{2n} = g_2 \sqrt{n+1}$ ,  $\Omega_{3n} = \sqrt{\Omega_{1n}^2 + \Omega_{2n}^2}$ ,  $\delta = \Delta/2$ ,  $\beta_n = \sqrt{\delta^2 + \Omega_{3n}^2}$ .

利用上述系统在相互作用表象中的态矢量可对系统中原子和场的动力学特性进行全面研究, 在以下文中, 取  $g_1 = g_2 = g$ 。

### 3 原子的崩溃与回复

由上节得到的态矢量可得原子处在第  $i$  个能级的几率为

$$P_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |F_n|^2 |B_i(n, t)|^2, \quad (i = 0, 1, 2) \tag{7}$$

将(6)式代入(7)式立即得到原子处在各能级的几率与时间的关系

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 - P_1(t) - P_2(t), \\ P_1(t) &= (1 - |\zeta|^2)^{1+q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} |\zeta|^{2n} \frac{\Omega_{2n}^2}{\beta_n^2} \sin^2 \beta nt, \\ P_2(t) &= (1 - |\zeta|^2)^{1+q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} |\zeta|^{2n} \left[ \frac{\Omega_{1n}^2}{\Omega_{3n}^2} + \frac{\Omega_{2n}^2}{\Omega_{3n}^2} \left( \cos \beta nt + i \frac{\delta}{\beta_n} \sin \beta nt \right) \exp(-i\delta t) \right]^2 \end{aligned} \tag{8}$$

当  $|\zeta| \neq 0$  时, (8) 式的数值计算结果如图 1、图 2 所示。图 1(a) 表明, 当  $\zeta \neq 0$  而  $q = 0$  (即光场初始处于双模压缩真空态) 时, 若  $\Delta = 0$ , 则  $P_i (i = 0, 1, 2)$  均随时间作无规振荡, 它暗示这时光场与热场相似<sup>[5]</sup>; 若失谐量  $\Delta \neq 0$  且较大, 则  $P_2(t)$  作准周期正向脉冲振荡, 即周期性呈现粒子数反转。此结果与双模压缩真空态同  $\Lambda$  型三能级原子<sup>[4]</sup> 相互作用过程中原子的拉

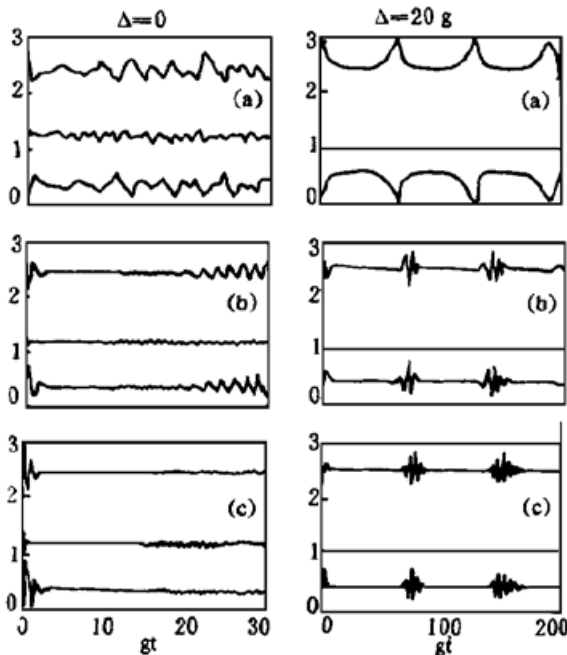


Fig. 1 Time evolution of  $P_0, P_1 + 1$  and  $P_2 + 2$ ,  $\zeta = 0.8$  (a)  $q = 0$ , (b)  $q = 4$ , (c)  $q = 8$

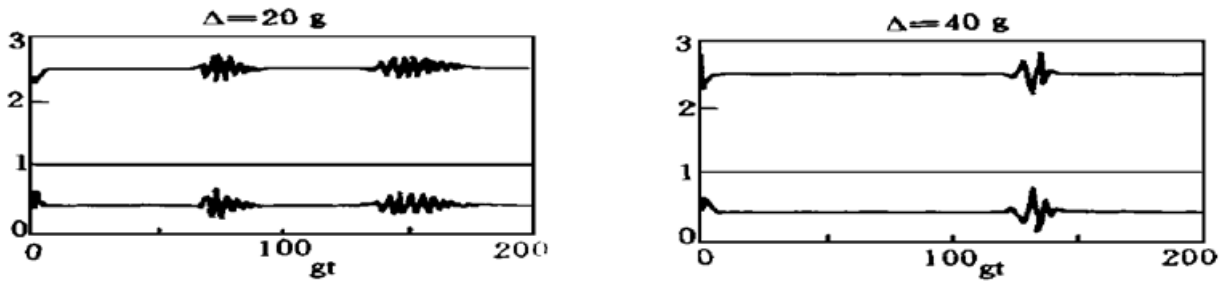


Fig. 2 Time evolutions of  $P_0, P_1 + 1$  and  $P_2 + 2, \zeta = 0.9, q = 4$

比振荡特征有所不同。当  $\zeta$  和  $q$  都不为零时, 若  $\Delta = 0$ , 则原子的拉比振荡显示出崩溃与回复, 其特征与文献[5]中的相似, 即对于同一  $\zeta$  增大两模的光子数之差  $q$ , 将使崩溃的时间延长。其原因是增加  $q$  使光子数分布展宽; 若  $\Delta \neq 0$  且较大, 如图 1、图 2 所示,  $P_1(t) \rightarrow 0$  而  $P_0(t)$  和  $P_2(t)$  呈现与双光子 J-C 模型类似的振荡特性<sup>[1]</sup>, 这是因为在失谐量很大时, 级联三能级原子系统等价于有效二能级原子系统<sup>[4,6]</sup>。另一方面, 当  $\Delta \neq 0$  时,  $\Delta$  和  $q$  一定,  $|\varphi|$  增加及  $\Delta$  和  $|\varphi|$  一定,  $q$  增加, 崩溃时间都延长但回复振荡期间的振荡次数明显增加, 这说明  $\Delta$  一定, 增大  $|\varphi|$  和  $q$  将增加原子和双模场的能量交换。这也是由于增加  $q$  和  $|\varphi|$  都使光子数分布展宽<sup>[5]</sup>。由图 2 可见,  $|\varphi|$  和  $q$  一定, 增加  $\Delta$  将使崩溃持续时间显著延长且回复振荡期间振荡次数减少因而能量交换减少。使用文献[4] 中的方法可得在大失谐量  $\Delta$  极限下拉比振荡的回复时间  $t_r = \pi k \Delta / g^2$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ), 即  $gt_r = \pi k \Delta / g$ 。显然与图 1 和图 2 一致。

## 4 场的量子统计性质

双模 SU(1, 1) 相干态场具有一系列非经典场的统计特性, 下面讨论双模场的互关联函数随时间的演化, 双模互关联函数定义为

$$g_{12}^{(2)}(t) = \frac{\langle \hat{a}_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle}{\langle \hat{a}_1^\dagger a_1 \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger a_2 \rangle} \quad (9)$$

利用(3)式和(6)式可求出(9)式的平均值。如果  $g_{12}^{(2)} > 1$ , 称两模之间是关联的;  $g_{12}^{(2)} < 1$ , 则称之为反关联, 对(9)式所作的数值计算结果如图 3、图 4 所示, 从图中可见, 级联三能级原子与 SU(1, 1) 相干态场相互作用下, 两模之间存在反关联, 此特点与文献[6]中的相同, 但  $g_{12}^{(2)}$  的时间演化特征显然存在不同于级联三能级原子与对相干态场的相互作用下<sup>[6]</sup> 的新特点。前者强烈地依赖于初始光场的强度参量  $\zeta$  而后者对初始光场强度的依赖不显著。如图 3 所示, 当初始光场强度参量  $\zeta$  较小时,  $g_{12}^{(2)}$  的时间演化呈现准周期“调幅”振荡特征, 两模之间存在反关联。其原因是  $\zeta$  较小时光子数具有很窄的分布, 使得  $g_{12}^{(2)}$  呈现较规则的振荡<sup>[2]</sup>。  $|\varphi|$  和  $\Delta$  一定时,  $q$  增加, 这意味着增加拉比振荡频率且光子数分布展宽, 这时, 反关联程度和  $g_{12}^{(2)}$  的振荡幅度减弱但振幅变化和振荡频率增大。  $|\varphi|$  和  $q$  一定时,  $\Delta$  增加, 因而原子与光场的能量交换减弱, 此时反关联程度和  $g_{12}^{(2)}$  的振幅无明显变化, 但  $g_{12}^{(2)}$  的振荡频率减小。  $q$  和  $\Delta$  一定时,  $|\varphi|$  增加, 比较图 3 的右(b) 图和图 4 的左图可见,  $g_{12}^{(2)}$  的振荡特征显然不

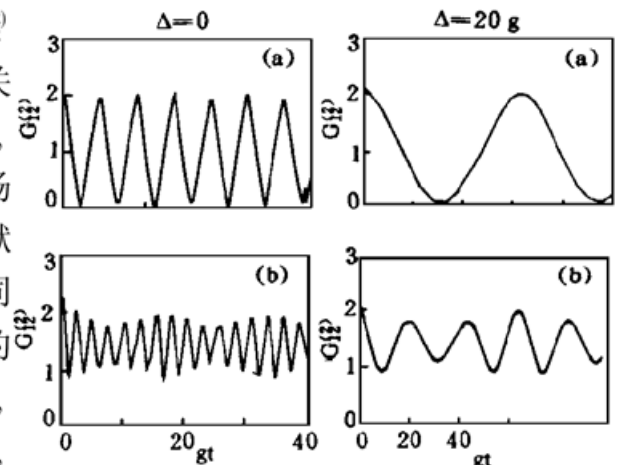


Fig. 3 Time evolution of  $g_{12}^{(2)}(t), \zeta = 0.2$ , (a)  $q = 0$ , (b)  $q = 4$

同。  $q$  和  $\Delta$  一定时,  $|\varphi|$  增加, 比较图 3 的右(b) 图和图 4 的左图可见,  $g_{12}^{(2)}$  的振荡特征显然不

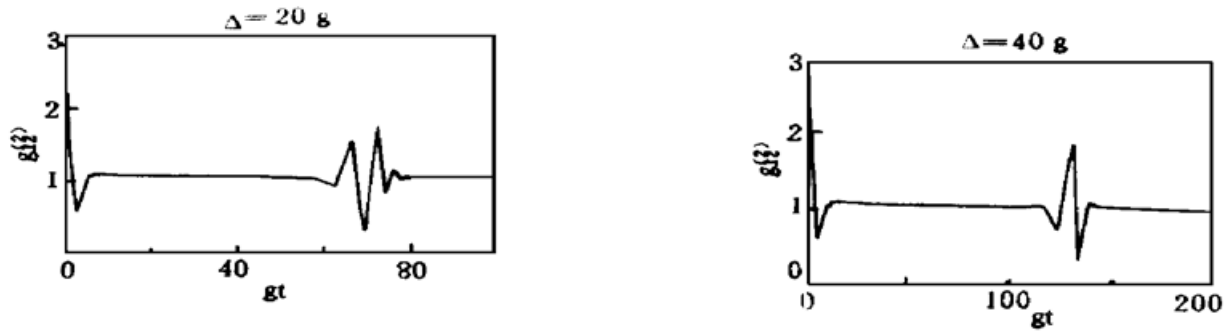


Fig. 4 Time evolution of  $g^{(2)}$ ,  $\zeta = 0.8, q = 4$

同,后者呈现崩溃回复现象而前者作调幅振荡。当 $|\zeta|$ 较大时,由于光子数具有较宽的分布,而较大的 $\Delta$ 使得原子与光场的能量交换减弱,这导致 $g^{(2)}$ 的振荡呈现与原子的拉比振荡相似的崩溃回复现象,且两者的回复时间相同,如图4所示。在崩溃阶段 $g^{(2)} \rightarrow 1$ ,这意味着在此阶段两模之间呈现弱关联,而回复振荡阶段存在反关联。上述结果既不同于双模场同V型三能级的相互作用情形<sup>[5]</sup>,也与双模场同二能级原子的相互作用结果有较大差异<sup>[3]</sup>。

**结 论** 本文讨论了双模SU(1,1)相干态场与级联三能级原子的相互作用下系统的时间演化,结果表明:1)原子的拉比振荡在一定的参数范围内呈现崩溃与回复现象;2)光场规律性地呈现关联和反关联特性;3)互关联函数的振荡在初始光场较强时呈现崩溃与回复现象,在初始光场较弱时作准周期调幅振荡,这说明原子与场的相互作用时对弱场和强场都有较大影响。

### 参 考 文 献

- [1] 周鹏,彭金生, 多光子Jaynes-Cummings模型的演化。光学学报,1990,10(9):837~844
- [2] 宋同强,冯健,王文正, 对数态Tavis-Cummings模型中辐射场的非经典性。光学学报,1993,13(12):1090~1095
- [3] Shih-Chuan Gou, Quantum behavior of a two-level atom interacting with two modes of light in a cavity. *Phys. Rev. (A)*, 1989, 40(9):5116~5128
- [4] W. K. Lai, V. Buzek, P. L. Knight, Dynamics of a three-level atom in a two-mode squeezed vacuum. *Phys. Rev. (A)*, 1991, 44(9):6043~6056
- [5] 路洪,彭金生,李高翔, 双模SU(1,1)相干态场与V型三能级原子相互作用的动力学。物理学报,1995,44(5):708~714
- [6] 赖云忠,汤洪明,容幸福, 对相干态与级联三能级原子相互作用过程中原子与场的动力学特性。光学学报,1997,17(2):135~139

## Dynamics of Two-Mode SU(1,1) Coherent State Interacting with a Three-Level Cascade Atom

Lai Yunzhong      Zhou Wei

(Department of Basic Science, Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan 030024)

(Received 29 April 1996; revised 13 September 1996)

**Abstract** The influences of the correlated two-mode SU(1,1) coherent state interacting with a three level cascade atom on the atomic dynamic behavior are discussed. The time evolution of the quantum statistic properties of two-mode field is investigated. Some new phenomena of the system are found.

**Key words** two-mode SU(1,1) coherent state, three-level cascade atom, atomic dynamic properties.