

平板波导谐振腔耦合损失的厄米高斯展开分析法

王新兵 徐启阳 谢明杰 李再光

(华中理工大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

摘 要 平板波导内的场按自由空间传播的厄米高斯函数展开, 计算了平板波导谐振腔的耦合损失, 给出了平板波导中 EH_{11} 模的耦合损失与球镜的曲率及位置的关系。结果表明存在两种特定的结构使耦合损失最小。

关键词 平板波导谐振腔, 耦合损失, 厄米高斯展开。

1 引 言

波导谐振腔理论的一个核心问题就是研究光在波导端口与反射镜之间的耦合损失, 已有大量的文献对方波导和圆波导谐振腔进行了理论分析^[1~3]。近年来, 由于横向放电激励技术的应用, 波导气体激光器广泛采用大面积电极窄间距的平板波导结构^[4], 然而上述理论分析并不能推广至平板波导谐振腔。本文对平板波导谐振腔的耦合损失进行理论计算和分析。

为了确定波导谐振腔的耦合损失必须确定波导内的场通过反射镜返回到波导的场分布, 通常可以采用两种方法: 一种就是衍射积分的方法; 一种是假设反射镜是无限大, 波导内的场可表示为自由空间传播的厄米高斯函数的线性叠加。上述两种方法对方波导和圆波导谐振腔耦合损失给出相同的结果。但是对平板波导谐振腔的耦合损失进行理论计算时, 第一种方法由于要计算双重积分, 计算量大且精度低; 因此本文采用后一种方法计算平板波导谐振腔的耦合损失。

2 理 论

考虑截面为 $2a \times 2b$ 的平板波导, 假设波导内电场是 x 方向极化的, 则波导内电场分布为^[5]

$$E_{pq}(x, y) = (ab)^{-1/2} \begin{cases} \cos(p\pi x/2a) \\ \sin(p\pi x/2a) \end{cases} \begin{cases} \cos(q\pi y/2b) \\ \sin(q\pi y/2b) \end{cases} \begin{matrix} p, q \text{ 为奇数} \\ p, q \text{ 为偶数} \end{matrix} \quad (1)$$

对于 y 方向极化的电场, 由文献[5]知, 其电场分布与(1)式类似, 因此下面分析的结果也是适用的。

上述模式构成一组完全的正交系, 即

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b E_{pq}(x, y) E_{p'q'}(x, y) dx dy = \delta_{pp'} \delta_{qq'} \quad (2)$$

本文将波导内的场分解为一系列自由空间传播的厄米高斯函数, 其束腰位于波导端口处, 即有

$$E_{pq}(x, y) = \sum_{m, n} A_{mn} \Phi_{mn}(x, y) \quad (3)$$

在直角坐标系中, $\Phi_{mn}(x, y)$ 由下式给出^[6]

$$\Phi_{mn}(x, y) = \frac{1}{(2^m m!)^{1/2}} \frac{1}{(2^n n!)^{1/2}} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/2} \frac{1}{\omega} H_m \left[\sqrt{2} x / \omega \right] H_n \left[\sqrt{2} y / \omega \right] \exp \left[- (x^2 + y^2) / \omega^2 \right] \quad (4)$$

式中 ω 为高斯光束的束腰, H_m 是第 m 阶厄米多项式。 $\Phi_{mn}(x, y)$ 是正交归一的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{mn}(x, y) \Phi_{m'n'}(x, y) dx dy = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (5)$$

根据(3)式、(5)式得到

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{1}{(2^m m!)^{1/2}} \frac{1}{(2^n n!)^{1/2}} \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{ab}\omega} \\ &\quad \times \int_{-a}^a H_m \left[\frac{\sqrt{2}x}{\omega} \right] \exp \left(-\frac{x^2}{\omega^2} \right) \begin{bmatrix} \cos(p\pi x/2a) \\ \sin(p\pi x/2a) \end{bmatrix} dx \\ &\quad \times \int_{-b}^b H_n \left[\frac{\sqrt{2}y}{\omega} \right] \exp \left(-\frac{y^2}{\omega^2} \right) \begin{bmatrix} \cos(q\pi y/2b) \\ \sin(q\pi y/2b) \end{bmatrix} dy \end{aligned} \quad (6)$$

引入参量 $r_m = b/a$ (波导纵横比), $r = a/\omega$, 作变换 $x = au$, $y = bv$ 则有

$$\begin{aligned} A_{mn} &= r \left(\frac{2r_m}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^m m!} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^n n!} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 H_m \left[\sqrt{2}ru \right] \exp \left(-r^2 u^2 \right) \begin{bmatrix} \cos(p\pi u/2) \\ \sin(p\pi u/2) \end{bmatrix} du \\ &\quad \times \int_{-1}^1 H_n \left[\sqrt{2}rr_m v \right] \exp \left(-r^2 r_m^2 v^2 \right) \begin{bmatrix} \cos(q\pi v/2) \\ \sin(q\pi v/2) \end{bmatrix} dv \end{aligned} \quad (7)$$

为了确定 A_{mn} 必须确定 r 的值亦即 ω 。显然由于 $\Phi_{mn}(x, y)$ 的正交归一性, 如果使用无穷多项厄米高斯函数即 TEM 模来展开波导内的场, 则可以任意选择 r 的值。但计算时只能采用有限项展开, 由此必然产生截断误差, 因此必须合理选择 r 来尽量减少由于有限项展开所产生的截断误差。由(2)式、(3)式和(5)式可以得到

$$\iint E_{pq}(x, y) |^2 dx dy = \sum_{m, n} |A_{mn}|^2 = 1 \quad (8)$$

对于有限项展开作者必须知道有多少能量包含在有限项展开中, 因此定义

$$F(m, n) = \sum_{m=n=0}^{m, n} |A_{mn}|^2 \quad (9)$$

选择 r 使得 $F(m, n)$ 接近于 1 则截断误差就可以忽略不计。

为计算耦合损失必须确定光从反射镜返回波导端口的场分布 $E'(x, y)$, 该场分布可以根据高斯光束的传输即变换规则得到^[6], 则从 EH_{pq} 模到 $EH_{p'q'}$ 模的耦合系数由下式给出

$$C_{pq}^{p'q'} = \left| \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a E'(x, y) E_{p'q'}(x, y) dx dy \right|^2 \tag{10}$$

EH_{pq} 模的耦合损失为

$$L_{pq}^{p'q'} = 1 - \left| \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a E'(x, y) E_{pq}(x, y) dx dy \right|^2$$

3 EH₁₁模的耦合损失

对 EH₁₁模有

$$A_{mn} = r(2r_m/\pi)^{1/2} (1/2^m m!)^{1/2} (1/2^n n!)^{1/2} I_m(r) I_n(r_m r) \tag{11}$$

$$I_m(r) = \int_{-1}^1 H_m[\sqrt{2}ru] \exp(-r^2u^2) \cos(\pi u/2) du,$$

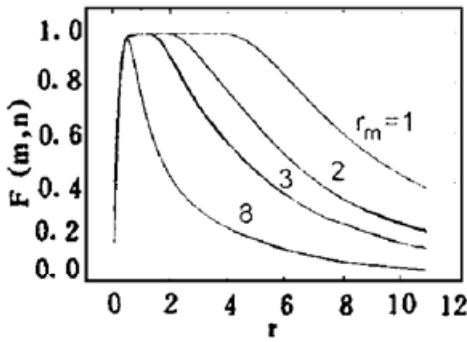


Fig. 1 Energy content $F(m, n)$ versus r for different value r_m

由于对称性所有奇数的 $A_{mn} = 0$ 。图 1 为不同 m 值时 $F(m, n)$ 与 r 的关系曲线。可以看出随着 m 的增加，必须仔细选择 r 使得 $F(m, n)$ 接近与 1。图 1 的曲线是本文一直展开到 $m = 12, n = 12$ 时得到的。在下面的计算中对 $r_m = 1$ 取 $r = 1.4$ ，对 $r_m = 2, 3$ 取 $r = 1.1$ ，可以使 $F(m, n)$ 在 99.8% 以上。对 $r_m = 8$ ，取 $r = 0.52$ ，可以使 $F(m, n) > 98.6\%$ 。

考虑一曲率为 R 的球镜放在距波导 z 的位置，首先考虑球镜的曲率 R 等于高斯光束的等相面的曲率半径 R' 时， R' 由下式给出

$$R' = b(z/b + b/z) \tag{12}$$

其中 $b = \pi w_0^2/\lambda$ 是共焦参量。在 $R = R'$ 的情况下只产生一相位移动，其返回场分布为

$$E'(x, y) = \sum_{m, n} A_{mn} \exp(i\varphi_{mn}) \phi_{mn}(x, y) \tag{13}$$

式中 φ_{mn} 为相移。 $\varphi_{mn} = 2(m + n + 1) \arctg(z/b)$ ，则耦合损失为

$$L_{11} = 1 - \left| \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a E'(x, y) E_{11}(x, y) dx dy \right|^2$$

$$= 1 - \left| \sum_{m, n} A_{mn}^2 \exp(i\varphi_{mn}) \right|^2 \tag{14}$$

耦合损失的计算结果如图 2 所示， $r_m = 1$ 即对应着方波导的情形，其结果与文献[3]中对圆波导的计算结果一致。很明显在 $z < 0.1b, z = b, z > 10b$ 时耦合损失很小，即对于方波导谐振腔有三种低耦合损失区。可以看出，随着 r_m 的增加，即从方波导变为平板波导时，在 $z = b$ 时耦合损失增加。因此对平板波导而言只存在着两种低耦合损失区，对应于 $z < 0.1b, z > 10b$ 。下面考虑 R 不等于 R' 的情况，则稍微复杂一些，这是因为返回的高斯光束的光斑半径及等相面曲率半径发生变化，引入

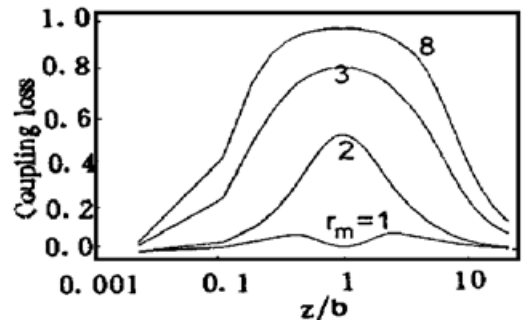


Fig. 2 Coupling loss versus mirror for the case where $R = R'$ at different value r_m

高斯光束 q 参量

$$1/q = 1/\rho - j/\beta \tag{15}$$

式中 $\beta = \pi w^2/\lambda$, w 为高斯光束的光斑半径, R 为光束等相面的曲率半径。初始 $q = -j/b$, 则通过反射镜返回波导时有

$$q_c = z + f \frac{z(f-z) - b^2}{(f-z)^2 + b^2} + j \frac{bf^2}{(f-z)^2 + b^2} \tag{16}$$

对平面镜有

$$q_c = 2z + b \tag{17}$$

返回波导的光束参量为

$$\rho = 1/\text{Re}[1/q_c], \quad \beta = -1/\text{Im}[1/q_c]$$

相移为 $\varphi_{mn} = (m + n + 1) [\arctg(z/b) + \arctg(z/\beta)]$, 光斑半径为 $w = w_0 \sqrt{\beta/b}$ 则返回场分布为

$$E'(x, y) = \sum_{m, n} A_{mn} \frac{1}{(2^m m!)^{1/2}} \frac{1}{(2^n n!)^{1/2}} \frac{1}{w} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \times H_m(\sqrt{2}x/w) H_n(\sqrt{2}y/w) \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2} \left(1 + j \frac{\beta}{\rho}\right)\right] \exp(j\varphi_{mn}) \tag{18}$$

图 3、图 4 分别为 $r_m = 1$ 及 $r_m = 8$ 时在不同曲率半径下, 耦合损失随反射镜位置的关系曲线。

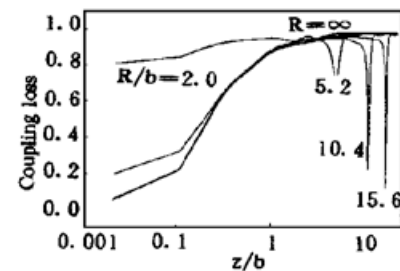
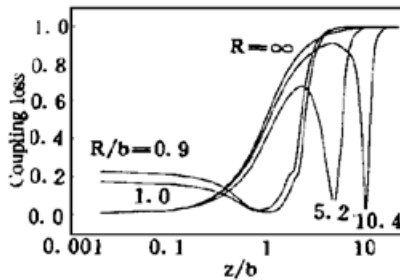


Fig. 3 Coupling loss versus mirror position for different mirrors of curvature at $r_m = 1$

Fig. 4 Coupling loss versus mirror position for different mirrors of curvature at $r_m = 8$

从图 4 可以看出在 $r_m = 8$ 时, 在 $z = b$ 附近无论用什么曲率半径的反射镜都不能获得低的耦合损失。因此在平板波导谐振腔的设计时, 必须使反射镜位于 $z < 0.1b$ 或 $z > 10b$ 的低耦合损失区。

在 $z < 0.1b$ 时, 从图 3 和图 4 中看出, 曲率半径很大的反射镜所产生的耦合损失同平面镜所产生的耦合损失相当。 $R = \infty$ 对应于平面镜的情形。

在 $z > 10b$ 时, 曲率越大, 耦合损失越小, 但是反射镜的位置必须精确地确定, 可以看出最小耦合损失的位置位于 $z/b = R/b$ 处, 即反射镜的曲率中心位于波导端口处。并且 r_m 增加, 要获得较小的耦合损失, 必须增加 R , 相应于要增加腔的长度, 这不利于激光器的小型化, 因此在实际上很少使用。

结 论 计算表明, 不同于方波导或圆波导谐振腔, 对平板波导来说只存在两种低耦合损失谐振腔, 分别对应于曲率半径很大的反射镜靠近波导及曲率半径很大的反射镜远离波导其中心位于波导端口处。

参 考 文 献

- [1] C. A. Hill, D. R. Hall, Coupling loss theory of single-mode waveguide resonators. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(9) : 1283~ 1290
- [2] J. J. Degnan, D. R. Hall, Finite-aperture waveguide lasers resonators. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1973, **QE-9**(9) : 901~ 910
- [3] Richard L. Abrams, Coupling losses in hollow waveguide laser resonators. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1972, **QE-8**(11) : 838~ 843
- [4] D. R. Hall, H. J. Baker, Area scaling boosts CO₂ laser performace. *Laser Focus World*, 1989, (10) : 77~
- [5] K. D. Leakmann, W. H. Steier, Waveguides: characteristic modes of hollow rectangular dielectric waveguides. *Appl. Opt.*, 1976, **15**(5) : 1334~ 1340
- [6] H. Kogelnik, T. Li, Laser beams and resonators. *Appl. Opt.*, 1966, **5**(10) : 1550~ 1567

Hermite-Gaussian Expansion Theory on Coupling Losses in Planar Waveguide Resonators

Wang Xinbing Xu Qiyang Xie Minjie Li Zaiguang

(National Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 9 June 1996; revised 13 January 1997)

Abstract A Hermite-Gaussian expansion is used to calculate the optical wave propagation between the planar waveguide and the reflector. The coupling losses in planar waveguide resonators are calculated and the coupling losses for the EH₁₁ mode of different planar waveguide as a function of mirror curvature and position are presented. It is shown that there exist two special geometries having low coupling losses.

Key words planar waveguide resonator, coupling loss, Hermite-Gaussian expansion.