

光束抖动频谱遥感大气湍流外尺度的理论与实验

宋正方 李玉杰*

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

摘 要 在微扰理论的基础上导出高斯光束相位归一化频谱的普遍表达式, 进而求得归一化光束抖动频谱的普遍表达式以及准直光束和球面波光束在均匀光路条件下的分析表达式。计算表明这些频谱中存在一个与湍流外尺度、横截风速有确定关系的峰值频率。文中根据这个特征利用大气相干长度测量仪进行了湍流外尺度的遥感实验, 与此同时用五台三杯风速计测量了光路中的平均风速。结果指出, 离地面 8 m 高度上的湍流外尺度在 2.6~7.0 m 之间变化, 平均值为 4.9 m。

关键词 光束抖动频谱, 遥感, 大气湍流外尺度。

1 引 言

由于图像传播理论和天文观测的需要, 近年来对大气中湍流外尺度 L_0 的研究得到了很大的关注^[1-3], 这是因为 L_0 直接与地基大口径望远镜的极限分辨率有关。但迄今为止由于测量方法上的限制, 人们对 L_0 的大小及其时空分布仍无完整的认识。一般认为近地面湍流的 L_0 与离地面的高度 H 有一定的关系—— L_0 与 H 成正比关系, 其比例系数在 0.3~1 之间; 而对几公里高空和自由对流层中的 L_0 认识更为贫乏。研究表明, 如果湍流外尺度是个有限值, 则大口径望远镜的相干长度和等晕角比传统理论估计的要大得多, 以致于在红外波段其极限分辨率可达到 $0.05 \mu\text{rad}^{[1]}$ 。事实上最近已在 $2 \mu\text{m}$ 波长上得到了这样高分辨率的星像, 大大超出了传统理论的预计^[4, 5]。因此对大气中湍流外尺度的变化规律进行仔细研究显然是十分必要的, 而在研究过程中寻找方便而精确的观测方法和仪器更为重要。

光束抖动的根源在于由大气湍流引起的相位起伏, 已有很多学者考虑过这个问题^[6], 导出了平面波和球面波情况下在高频和低频极限条件时的表达式。本文根据微扰理论从光束相位起伏频谱出发, 导出了适用于整个频域的归一化抖动频谱的普遍表达式, 对均匀光路求得了分析表达式, 并得到实验结果很好的支持。在此基础上进一步得到了简单的以峰值频率为函数的作为遥感基础的计算湍流外尺度的公式。利用大气相干长度测量仪测量了 500 m 通道上的光束抖动频谱, 同时测量了光程上的风速, 初步得到了实际大气中湍流外尺度的分布范围。结果表明, 外尺度也是随时间变化的, 其平均值为 4.9 m。

* 现在甘肃电力试验研究所。

收稿日期: 1996 年 7 月 11 日; 收到修改稿日期: 1997 年 1 月 14 日

2 理 论

光波传播的平缓扰动理论指出，到达角起伏(图像抖动)频谱 $W_{\alpha}(f)$ 与相位差频谱 $W_{\delta s}(f)$ 存在下列关系:

$$W_{\alpha}(f) = (k\rho)^{-2}W_{\delta s}(f) \tag{1}$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$, λ 为波长, ρ 为接收光学系统直径。相位差频谱与相位起伏频谱 $W_s(f)$ 有关^[6]

$$W_{\delta s}(f) = F(\Omega)W_s(f) \tag{2}$$

式中 $\Omega = f/f_1 = V/2\pi\rho$, V 为光路垂直方向上的风速。 $F(\Omega)$ 是与光束性质有关的滤波函数, 例如, 对于准直光束和球面波分别具有如下形式:

$$F(\Omega) = \begin{cases} \sin^2[\Omega/2], & \text{对准直光束} \\ \frac{1}{2} [1 - \sin(\Omega)/\Omega], & \text{对球面波} \end{cases} \tag{3}$$

因此可以从相位起伏频谱着手讨论图象抖动频谱。

相位起伏频谱可由自相关函数 $R_s(\tau)$ 的傅里叶变换求得:

$$W_s(f) = 4 \int_0^{\infty} R_s(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau \tag{4}$$

为使讨论具有普遍意义, 首先讨论高斯光束的相位起伏, 其时间自相关函数可表达为^[7]:

$$R_s(\tau) = 2\pi^2 k^2 L \int_0^{\infty} d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa) \int_0^1 d\eta J_0(\kappa V \tau) \exp(-\gamma_2 \eta^2 \kappa^2 L/k) \cos^2[\eta(1 - \gamma_1 \eta) \kappa^2 L/2\kappa] \tag{5}$$

$$\gamma_1 = (L/R) (L/R - 1) + (L + ka^2)^2 (1 - L/R)^{-2} + (L/ka^2)^2$$

$$\gamma_2 = (L/ka^2) [(1 - L/R)^2 + (L/ka^2)^2]^{-1}$$

式中 L 为传播距离, κ 为湍流的空间波数, $\Phi_n(\kappa)$ 为折射率起伏谱函数, η 为距离变量, $J_0(x)$ 为零阶贝塞尔函数, R 为光束的曲率半径, a 为光束的有效半径。

将(5)式代入(4)式, 并进行相应的运算, 得到高斯光束的归一化相位起伏频谱表达式:

$$U_s(f) = \frac{W_s(f)}{W_s(0)} = 4 \frac{\int_0^L d\eta V^{-1} \int_{\omega/V}^{\infty} d\kappa \kappa \Phi_n(\kappa) [\kappa^2 - (\omega/V)^2]^{-1/2} f_s(\kappa, \eta)}{\int_0^L d\eta V^{-1} \int_0^{\infty} d\kappa \Phi_n(\kappa) f_s(\kappa, \eta)} \tag{6}$$

$$f_s(\kappa, \eta) = \exp\left[-\gamma_2 \frac{L - \eta}{k} \kappa^2\right] \left[1 + \cos\left[\gamma_1 \frac{L - \eta}{k} \kappa^2\right]\right]$$

式中 $\omega = 2\pi f$ 。考虑到湍流外尺度的影响, 采用变形 Von Karman 模型:

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \tag{7}$$

式中 C_n^2 为折射率起伏结构函数, 其数值表征了湍流的强度; $\kappa_0 = 2\pi/L_0$, L_0 为湍流外尺度*。

将(7)式代入(5)式, 并令

$$I = \int_{\omega/V}^{\infty} d\kappa \kappa (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} [\kappa^2 - (\omega/V)^2]^{-1/2} \exp[-a_2(1-s)\kappa^2] \{1 + \cos[a_1(1-s)\kappa^2]\} \tag{8}$$

* 顺便指出, κ_0 尚有其它的定义(例如 $\kappa_0 = 1.071/L_0$), 但不影响这里讨论的一般性。

$$I_0 = \int_0^{\infty} d\kappa (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \exp[-b_2(1-s)\kappa^2] \{1 + \cos[b_1(1-s)\kappa^2]\} \quad (9)$$

式中已设

$$s = \eta/L, \quad a_1 = (\gamma_1 L/k)(\Omega/V)^2, \quad a_2 = (\gamma_2 L/k)(\Omega/V)^2, \\ b_1 = \gamma_1 L/k, \quad b_2 = \gamma_2 L/k$$

对(8)式和(9)式取变换 $t = (\kappa V/\omega)^2 - 1$, 并设 $\Phi = 1 + (\kappa_0 V/\omega)^2$, 在对 t 积分后分别得到:

$$I = \frac{1}{2} \Gamma \left[\frac{1}{2} \right] \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(11/6)} V^{3/2} f^{-3/2} \Phi^{-3/2} I_a, \quad I_0 = \frac{1}{2} \Gamma \left[\frac{1}{2} \right] \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(11/6)} \kappa_0^{-3/2} \Phi^{-3/2} I_b \quad (10)$$

其中

$$I_a = \exp[-a_2(1-s)] \{F_1(1/2; -1/3; a_2\Phi(1-s)) \\ + 1.8107(a_2\Phi)^{3/2} F_1(11/6; 7/3; a_2\Phi(1-s))\} \\ + \operatorname{Re} \{ \exp[-a(1-s)] [F_1(1/2; -1/3; a\Phi(1-s)) \\ + 1.8107[a\Phi(1-s)]^{3/2} F_1(11/6; 7/3; a\Phi(1-s))] \} \\ I_b = F_1(1/2; -1/3; b_2\kappa_0^2(1-s)) \\ + 1.8107[b_2\kappa_0^2(1-s)]^{3/2} F_1(11/6; 7/3; b_2\kappa_0^2(1-s)) \\ + \operatorname{Re} \{ [F_1(1/2; -1/3; b\kappa_0^2(1-s)) \\ + 1.8107[b\kappa_0^2(1-s)]^{3/2} F_1(11/6; 7/3; b\kappa_0^2(1-s))] \} \\ a = a_2 - ia_1, \quad b = b_2 - ib_1$$

将(10)式代入(6)式, 即得高斯光束相位起伏归一化频谱的普遍表达式:

$$U_s = 4\omega^{-3/2} \frac{\int_0^1 ds V^{3/2} C_n^2 \Phi^{-3/2} I_0}{\int_0^1 ds V^{-1} C_n^2 k_0^{-3/2} I_b} \quad (11)$$

根据(1)式和(2)式的关系, 直接得到归一化抖动频谱的普遍表达式:

$$U_\alpha = 4\omega^{-3/2} \frac{\int_0^1 ds V^{3/2} C_n^2 \Phi^{-3/2} I_a}{\int_0^1 ds V^{-1} C_n^2 k_0^{-3/2} I_b} F(\Omega) \quad (12)$$

由上式可知, U_α (或 U_s) 取决于风速和湍流强度的高度分布, 以及光束的形状, 一般无分析解, 但在特殊情况下可以得出分析解。

对于常用波长 ($\lambda \leq 10^{-6}$ m) 的准直光束 ($R \rightarrow \infty$), 在现实的传播距离 ($L \leq 10^4$ m) 和接收孔径 ($\rho \leq 1$ m) 的情况下, $\gamma_1 \ll \gamma_2$, 并且 γ_2 也是个很小的量 ($\leq 10^{-3}$), 这时 $I_a \approx I_b \approx 2$, 于是(12)式简化为:

$$U_\alpha = 4\omega^{-3/2} \frac{\int_0^L d\eta V^{3/2} C_n^2 \Phi^{-3/2} F(\Omega)}{\int_0^L d\eta V^{-1} C_n^2 \kappa_0^{-3/2}} \quad (13)$$

在均匀光路中湍流强度和风速均为常数, 上式进一步简化为:

$$U_{\alpha} = 4[1 + (\Omega/\kappa_0\rho)^2]^{-3/4} \sin^2(\Omega/2) \tag{14}$$

(13) 式表明, 在均匀光路上归一化图像抖动频谱是湍流外尺度和大气横截风速的函数, 而与传播距离无关。在低频端 $U_{\alpha} \propto \Omega^2$, 而在高频端 $U_{\alpha} \propto \Omega^{-3/2}$, 中间部分 U_{α} 存在峰值。计算指出, 峰值无量纲频率 Ω_m 一般在 0.05 ~ 0.2 之间(f_m 约为 0.1~ 1 Hz 左右)。

为了考察上述理论的正确性, 作者在图 1 中给出了文献[4]的实验数据和(14)式的理论曲线, 其中所用的参数为 $\rho = 0.55 \text{ m}$, $L_0 = 2 \text{ m}$, $V = 6 \text{ m/s}$ 。理论曲线的高频部分是振荡的, 这里已作了平滑, 但不妨碍得到理论和实验平均说来很符合的结论。

抖动频谱在低频区存在峰值的特征为遥感湍流外尺度提供了理论基础。

前已指出, Ω_m 一般在 0.05 ~ 0.2 之间, 因此, 取 $\sin^2(\Omega/2) = \Omega^2/4$ 具有很好的精度, 于是(14)式可改写为:

$$U_{\alpha} = \Omega^2[1 + (\Omega/\kappa_0\rho)^2]^{-3/4} \tag{15}$$

对上式求导, 并令其为零, 从而得到:

$$f_m = \sqrt{3} V/L_0 \tag{16}$$

(16) 式具有很明确的物理意义, 并且显然是合理的。因为具有外尺度为 L_0 的气团在风速愈大时愈频繁地越过接收口径, 信号变化的频率将越高, 频谱将向高频扩展; 而在一定风速的情况下外尺度愈大的气团将愈少地越过接收口径, 信号变化的频率显然越低, 频谱即向低频移动。于是, 只要测出峰值频率 f_m 和当时横截风速 V , 即可求得湍流外尺度:

$$L_0 = 1.732V/f_m \tag{17}$$

(17) 式就是用于遥感湍流外尺度的基本公式。

3 实 验

实验工作是在大气相干长度测量仪^[9]上进行的。该仪器利用双光路差分图象抖动原理, 具有很好的测量精度。原来用于获取星光抖动的数据, 进而求得大气相干长度, 现在光源改用 He-Ne 激光, 所获取的数据用于求取抖动频谱。光源放在离相干长度测量仪 500 m 远处, 通过 $\Phi 260 \text{ mm}$ 的平行光管准直, 发散角(全角)约 20"。光路离地面的高度平均为 8 m, 下垫面主要是草地和水面, 考虑到该光路的均匀性不够理想, 在一个或两个点上测量风速缺乏代表性, 因而在 500 m 通道上均匀放置了五台三杯式风速计, 平均离地面约为 3 m。风速的大小和方向数据通过电缆由计算机以每秒一次的采样率进行连续采集。本文处理时首先换算成横向风速然后取 20 sec 的平均值, 并对 5 个测点的风速进行算术平均, 将其结果作为光路上 20 sec 的平均横向风速。

作者在 1995 年 11 月~ 12 月期间进行了较长时间的测量, 采集到大量数据。采样率为 25 frame/s, 由于计算机内存限制, 只能进行 36 sec 的连续采样, 因此每个样本的长度为 900。现已对 12 月 26 日和 28 日的的数据进行了处理。其步骤是首先对每个样本进行快速傅里叶变换, 然后画出其频谱曲线, 找到曲线峰值所对应的频率 f_m 。限于快速傅里叶变换的算法, 只

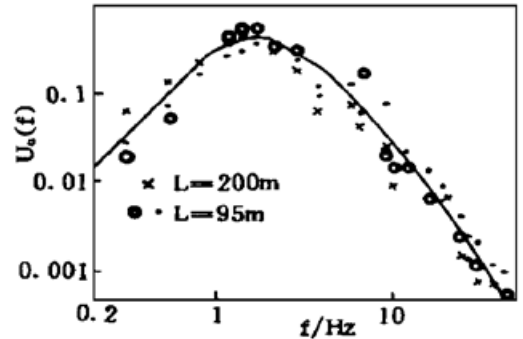


Fig. 1 Coparison between experimental and theoritic normal frequency spectrum of beam motion

取了 512 个数(约 20 sec 的数据) 进行计算。图 2 展示了两个典型的例子, 可以看到理论曲线 (虚线) 和实验曲线的平均值很符合。在这两个例子中, f_m 分别为 0.64 Hz 和 0.42 Hz, 对应的风速 V 分别为 1.4 m/s 和 0.9 m/s。按(15)式可算得分别为 3.8 m 和 3.7 m。

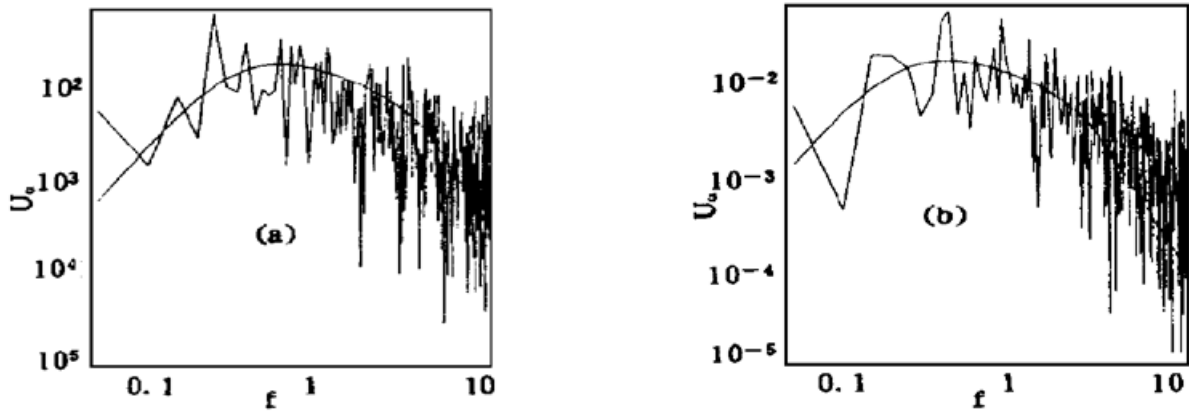


Fig. 2 Comparison between theoretical and experimental spectrum of angle-of-arrival fluctuation (a) 95- 12- 26; (b) 95- 12- 28

图 3 是这两天测到的 L_0 随时间的变化图, 每个点是 20 sec 的平均。显然外尺度也随机变化, 变化范围在 1.4 m~ 8 m 之间, 相邻几分钟最大可变化 4 m 以上, 总的平均值是 3.8 m。

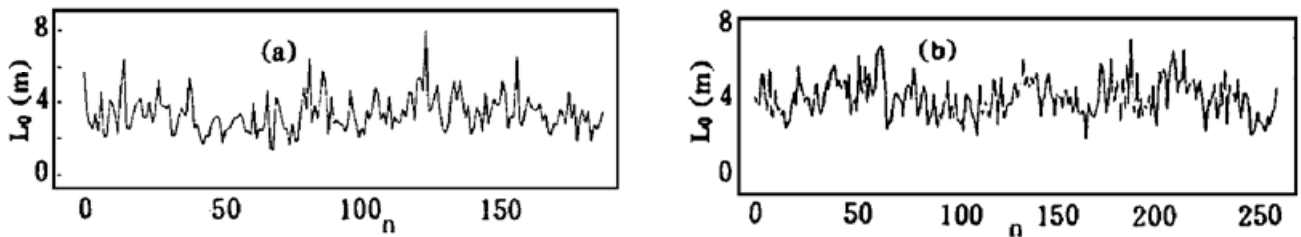


Fig. 3 Turbulent outer scale vs time (a) 95- 12- 26; (b) 95- 12- 28

图 4 画出了这两天测到的的频数分布, 图中虚线为高斯拟合曲线, 可以看出 L_0 的频数分布十分接近高斯分布, 其中值分别是 3.4 m 和 4.1 m。出现在 2.0~ 5.5 m 之间的概率较其它数值的要大得多, 这个范围的外尺度占了总数的 92%。

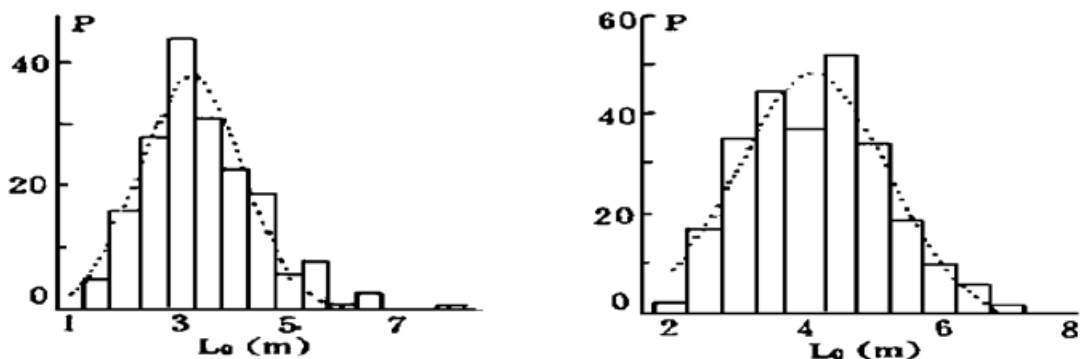


Fig. 4 Frequency distribution of turbulent outer scale (L: 95- 12- 26; R: 95- 12- 28)

4 讨 论

前面的结果表明, 在本文实验期间内 L_0 较多的分布在 2~ 5.5 m 范围内, 平均值为 3.8 m。考虑到大气相干长度测量仪的测量光路的平均高度为 8 m, 而风速测量的平均高度为 3 m, 两者的高度不一致, 故应对 L_0 的测量结果进行修正。

众所周知风速是随高度增加而变大的, 其规律依赖于大气层结的稳定度。若以晚间常出现的中性层结而论, 近地面风速廓线呈下列幂次关系^[10]:

$$V(h) = V(h_0)(h/h_0)^{3/4} \quad (19)$$

由此可知, 8 m 高度上的风速应为 3 m 高度上的 1.28 倍, 则 L_0 的平均值应订正为 4.9 m, 而其经常分布的范围为 2.6~ 7.0 m。

上述结果还包含了一定的测量误差, 其来源是风速误差 ($\Delta V/V$) 和频率误差 ($\Delta f_m/f_m$) 两部分。作者在大气风速的光学遥感研究工作中已证明遥感的风速 V_0 与同样这五个点上测量的平均风速 V 很相符, 平均成立如下关系:

$$V_0 = 0.9V + 0.12 \quad (20)$$

相关系数达 0.91。由此可知风速测量的代表性很好, 而其准确度是由定标决定的, 测量误差一般在 5% 左右。但 f_m 在确定过程中大约会产生 0.1~ 0.2 Hz 的误差, 有可能使其相对误差达到 20%, 这成了 L_0 测量误差的主要来源。如果按 20% 的相对误差计算, 那么本文的平均结果便是 $L_0 = 4.9 \pm 1$ m。

若将所得的 L_0 与所处高度 H 进行比较, 可知其比例系数有 92% 机会处于 0.32~ 0.88 的范围之内, 与引言中所指出的 0.3~ 1 这个范围相符。作为对照, 曾宗泳等于 95 年 10 月用几台单点温度脉动仪在不同高度上测量了温度脉动频谱, 由其在惯性区间中的性质, 求出了外尺度。经对上千个数据的分析, 发现 L_0 也呈现高斯分布, 中值在 $L_0/H = 0.81$ 处。由于他们的测量高度和时间与本文的不同, 且脉动仪的高度各不相同, 两者无法直接对比, 但上述事实足以证明本文的结果是可信的。当然, 在条件具备时最好同时在同一高度上测量, 直接进行比较, 并且需作较长时间的测量, 以便全面了解外尺度的规律; 在此基础上再配合高空风速的测量, 即可进行整层平均外尺度的遥感。这些正是作者以后准备进行的工作。

最后应当指出, 应用频谱法遥感外尺度, 重要的是得出到达角起伏频谱的实验曲线, 并通过该曲线较准确的得出峰值频率 f_m , 同时也要准确的测出横截风速。风速测量方面的问题不大, 而 f_m 的准确获得, 一方面要求测量的信噪比较高, 另一方面还要求一定的采样率和样本长度。本文的采样率为 25 Hz, 显然是比较低的, 好在作者要的是低频信息, 高频分量的损失并不影响测量结果, 而样本长度直接影响低频信息。本文采用 512 个点进行快速傅里叶变换运算, 得到的曲线在低频部分比较稀疏, 势必在求 f_m 的过程中带来较大误差, 从而给外尺度测量带来较大误差。为提高测量精度, 今后有必要进一步提高样本的长度。

本文引用的风速和温度脉动仪的数据由谭锟研究员和曾宗泳研究员等提供, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] 宋正方, 范承玉, 湍流外尺度对大气相干长度和等晕角的影响. 强激光与粒束, 1994, 6(3): 496~ 473
- [2] T. S. McKechnie, Significance of anisotropy and the outer scale of turbulence for optical and radio seeing. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1992, 9(11): 1937~ 1954
- [3] C. E. Coulman, J. Vernin, Atmospheric turbulence and the resolution limits of large ground-based telescopes. *Appl. Opt.*, 1991, 30(11): 118~ 126
- [4] В. Е. Зуев, Б. А. Бахаф, В. В. Покасов. Оптика Турбулентной Атмосферы. Ленинград. Гидрометеонадат. 1988: 84~ 90
- [5] T. S. McKechnie, Light propagation through the atmosphere and the properties of image formed by

- large ground-based telescopes. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1991, **8**(2) : 346~ 365
- [6] R. L. Fante, Electromagnetic beam propagation in turbulent media. *Proc. IEEE*, 1975, **63**(12) : 1669 ~ 1692
- [7] В И Татарский Распространение В Турбулентной Атмосфере Москва Наука 1967 : 548~ 562
- [8] А. С. Гурвич А. И. Коң В Л. Миронов и др., Лазерной Излучение в турбулентной Атмосфере Москва Наука 1976 : 86~ 94
- [9] 杨高潮等, 大气相干长度与等晕角的测量. *强激光与粒子束*, 1994, **6**(2) : 215~ 220
- [10] 朱炳海等主编, 气象学词典, 上海, 上海辞书出版社, 1985 : 176

Theory and Experiment Study on Remote Sensing of Atmospheric Outer Scale Using Beam Motion Spectrum

Song Zhengfang Li Yujie

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)

(Received 11 July 1996; revised 14 January 1996)

Abstract Based on the smooth perturbation theory, a general expression of normalized spectrum for Gaussian beam and an analytic formula of normalized spectrum for collimated or spherical beam in a homogeneous path are given. Calculation shows that there is a peak frequency in these spectrums and the frequency depends on turbulent outer scale and transversal wind. According to this characteristic the outer scale is remote sensed successfully by using the atmospheric coherent length measurer. At the same time five three-cup anemometers distributed evenly on the path are applied to measure average wind. Experimental results indicate that the outer scale is varied in the range of 2.6~ 7.0 m at the altitude of 8 m above the ground and the average value is 4.9 m.

Key words beam motion spectrum, remote sensing, atmospheric turbulent outer scale.