

基于能量最小的统计三级截值模型*

常胜江¹ 杨建文² 申金媛¹ 金成海² 张延焯¹

〔 1, 南开大学国家教委光学信息技术科学开放实验室, 天津 300071
2, 南开大学现代光学研究所, 天津 300071 〕

摘 要 从能量函数出发, 用统计学方法建立了统计三级截值(clipped)模型, 克服了用光学技术实现 Hopfield 模型时难以表示其高动态范围互连权重的弱点。与光学中通常采用的模型(如截值模型、三级截值模型)相比, 统计三级截值模型提高了网络的存储容量和寻址能力。

关键词 统计三级截值模型, 存储容量, 寻址能力。

1 引 言

光学以其固有的超并行性和立体互连能力, 为实现较大规模的神经网络提供了可靠的保证, 是目前实现大规模神经网络最有效的途径之一。但光学的数值精度差的弱点, 也限制了它在神经网络硬件实现中的应用, 具体的困难表现在: 用光学技术实现人工神经网络模型时, 难以用相应的光学显示器件表示高动态范围的互连权重。例如, 对于 Hopfield 模型, 其互连权重由 Hebb 规则确定

$$W_{ij} = \sum_{m=1}^M S_i^{(m)} S_j^{(m)} - gM\delta_{ij} \quad (1)$$

式中 $S_i^{(m)}$ 为 M 个 N 维记忆矢量($m = 1 \cdots M$), 取值为 $+1$ 或 -1 , $\delta_{ij} = 1$ (当 $i = j$) 或 $\delta_{ij} = 0$ (当 $i \neq j$), g 为网络参数, $0 \leq g \leq 1$ 。从(1)式可以看出, 当存储的模式数 M 较大时, 互连权重的动态范围很宽, 难以用光互连技术实现。为了使 Hopfield 模型易于光学实现, Psultis^[1]等提出了截值模型, 其互连权重表示为:

$$T_{ij} = \text{sgn}(W_{ij}) = \begin{cases} 1 & W_{ij} > 0 \\ 0 & W_{ij} = 0 \\ -1 & W_{ij} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

同 Hopfield 模型相比, 截值模型互连权重的动态范围得到了压缩(1, 0, -1 三值), 且与存储模式数目 M 无关, 因此适于光学及微电子技术实现。但互连权重经(2)式二值化处理后, 存储容量从 0.138 下降至 0.08^[2], 寻址能力也有所下降。从信息处理的角度来说, 截值模型所采用的对互连权重的处理方式损失了互连中的信息, 因而信息容量下降。为了提高截值模型的存储容量及寻址能力, 路明哲^[3]等人提出了三级截值模型,

* 国家自然科学基金及博士点基金资助课题。

收稿日期: 1996 年 9 月 27 日; 收到修改稿日期: 1997 年 2 月 24 日

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & W_{ij} > M/3 \\ 0 & |W_{ij}| \leq M/3 \\ -1 & W_{ij} < -M/3 \end{cases} \quad (3)$$

计算机模拟结果表明, 当网络规模 $N = 100$ 时, 三级截值模型的存储容量可达 0.11, 同截值模型相比, 存储容量及寻址能力有所改善。众所周知, 当网络规模较大 (N 大) 及存储模式为随机模式时, 由 Hebb 规则求得的互连矩阵元素值的分布统计上服从于正态分布^[4]。此时互连矩阵中值介于 $-M/3 \sim M/3$ 之间的元素占绝大多数, 经截值处理后这些互连矩阵元变成了零, 当网络进行内容寻址时, 神经元的模拟输出量变小, 网络的寻址能力同截值模型相比必将下降。因此, 三级截值模型并非截值模型的最佳改进方法。

2 统计三级截值模型

从上面的分析可见, 截值模型和三级截值模型截值点的选择只是一种猜测, 没有任何理论依据。本文从网络的能量函数出发, 用统计学方法讨论了确定三级截值模型最佳截值点的方法, 并把由这种方法建立的模型称为统计三级截值模型, 其原理如下:

设由 Hebb 规则求得的互连矩阵元为 W_{ij} , 相应的三值互连矩阵 T_{ij} 满足下式

$$T_{ij} = \begin{cases} C_0 & W_{ij} > C_0 \\ 0 & |W_{ij}| \leq C_0 \\ -C_0 & W_{ij} < -C_0 \end{cases} \quad (4)$$

其中 C_0 为一正常数, 互连矩阵元 W_{ij} 经(4)式处理所引起的误差 ΔT_{ij} 为

$$\Delta T_{ij} = W_{ij} - T_{ij} = \begin{cases} W_{ij} - C_0 & W_{ij} > C_0 \\ W_{ij} & |W_{ij}| \leq C_0 \\ W_{ij} + C_0 & W_{ij} < -C_0 \end{cases} \quad (5)$$

经(4)式处理后的三值互连权重所对应的网络的能量函数 E_c 为

$$E_c = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} S_i^{(m)} S_j^{(m)} + \sum_{i=1}^N \theta_i S_i^{(m)} \quad (6)$$

对于存储模式 S 和互连矩阵 T 都为双极的全双极神经网络模型来说, 阈值通常为 0, 因此(6)式改写为

$$\begin{aligned} E_c &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} S_i^{(m)} S_j^{(m)} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (W_{ij} - \Delta T_{ij}) S_i^{(m)} S_j^{(m)} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{ij} S_i^{(m)} S_j^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta T_{ij} S_i^{(m)} S_j^{(m)} \\ &= E_H + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta T_{ij} S_i^{(m)} S_j^{(m)} \end{aligned} \quad (7)$$

这里 $E_H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{ij} S_i^{(m)} S_j^{(m)}$ 为 Hopfield 模型的能量函数。对上式取绝对值后变为

$$|E_c - E_H| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta T_{ij} S_i^{(m)} S_j^{(m)} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\Delta T_{ij}| \quad (8)$$

为使三值互连网络的能量函数 E_c 逼近 Hopfield 网络的能量函数, 应使 $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\Delta T_{ij}|$ 为最小, 即满足下式

$$\frac{d(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\Delta T_{ij}|)}{dC_0} \Big|_{C_0=C_0^*} = 0 \tag{9}$$

(9) 式的物理意义很明确。对于神经网络来说，外部的信息分布地存储于网络之中，互连矩阵是外部信息在神经网络内部的表达形式，而互连矩阵元素值的分布正是信息的具体体现。因此，用截值方法压缩互连权重的动态范围时，应使截值后的互连矩阵尽量接近原始互连矩阵，即最佳截值点 C_0^* 的值应满足(9) 式。

下面用统计方法计算出 C_0^* 的值。当双极的存储矢量 $S_i^{(m)} (m = 1, 2 \cdots M, i = 1, 2 \cdots N)$ 为随机矢量时，由(1) 式的 Hebb 规则求得的互连矩阵 W 的元素值分布于 $[-M, M]$ 之间，当 M 较大时， W_{ij} 值为 x 的概率分布近似服从于正态分布^[4]

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi M}} \exp(-\frac{x^2}{2M}) \tag{10}$$

由于 $p(x) \sim x$ 关系曲线具有轴对称特性，所以只需考虑互连矩阵元素值大于 0 的情况。由(4) 式可知，表达式 $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\Delta T_{ij}|$ 可写成概率 $P(x)$ 的形式

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\Delta T_{ij}| = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |W_{ij} - T_{ij}| = 2[\sum_{x=0}^{C_0} P(x)x + \sum_{x=C_0}^M P(x)(x - C_0)] \tag{11}$$

(11) 式括号里的表达式只对应于互连矩阵元素值大于零的部分，因此在该项前面加 2 倍因子。从统计学可知，当网络存储的模式数 M 较大时，上述分立的互连矩阵元素值近似为连续分布，因此(11) 式改写为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\Delta T_{ij}| &= 2[\int_0^{C_0} P(x)x dx + \int_{C_0}^M P(x)(x - C_0) dx] \\ &= 2[\int_0^M P(x)x dx + C_0 \int_M^{C_0} P(x) dx] \\ &= 2C + 2C_0 \int_M^{C_0} P(x) dx \end{aligned} \tag{12}$$

其中 C 为 $\int_0^M P(x) dx$ 积分后的值，与 C_0 无关，是仅与 M 有关的常数。最佳的截值点 C_0^* 应满足(9) 式，即

$$\frac{d(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\Delta T_{ij}|)}{dC_0} \Big|_{C_0=C_0^*} = 2 \int_M^{C_0^*} P(x) dx + 2C_0^* P(C_0^*) = 0 \tag{13}$$

可得

$$\int_M^{C_0^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi M}} \exp(-\frac{x^2}{2M}) dx + C_0^* \frac{1}{\sqrt{2\pi M}} \exp(-\frac{C_0^{*2}}{2M}) = 0 \tag{14}$$

解(14) 式可求得 $C_0^* = 0.77 \sqrt{M}$ 。

从(4) 式可以看出，截值处理后的互连矩阵 T 的元素只有三个值 C_0^* 、 $-C_0^*$ 和 0，当网络进行内容寻址时，神经元的下一个状态表示为： $V(t+1) = \text{sgn}[TV(t)]$ ，由于神经元的激活函数取符号函数且 C_0^* 为正数，从互连矩阵 T 中提出 C_0^* 不影响神经元输出的状态 $V(t+1)$ ，因此 T 相当于+ 1、0 和- 1 三值矩阵。

3 计算机模拟结果

对存储矢量为 1024 维的随机矢量进行了计算机模拟, 主要结果如下:

1) 存储容量 网络联想的出错率 q 的定义为

$$q = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N S'_i S_i}{N}$$

其中 S 与 S' 分别为存储矢量和迭代达到稳定后的输出矢量。定义当统计平均出错率 $\langle q \rangle$ 小于 1.5% 时, 参数 $a_c = M/N$ 的值作为该神经网络的存储容量, 记为 a_c^* 。图 1 给出了 $N = 1024$, 截值模型、三级截值模型和统计三级截值模型对于大量随机模式的统计平均出错率 $\langle q \rangle$ 与 a_c 的关系曲线。从图 1 可知, 截值模型 (CM) 的 $a_c^* \approx 0.072$, 三级截值模型 (TCM) 的 $a_c^* \approx 0.028$, 而统计三级截值模型 (STCM) 可达 $a_c^* \approx 0.098$ 。可见统计三级截值模型的三值互连编码方法比截值模型及三级截值模型的互连编码方法提高了网络的存储容量。

2) 寻址能力 为了考察统计三级截值模型在有噪声情况下的寻址能力, 在每个存储模式中用 N' 个 1 或 -1 随机地代替该模式中的相同数目的分量, 并用它作为初始模式, 求在不同噪声 N' 下的存储模式数目 M 的值, 图 2 为三种模型的寻址能力曲线。由图 2 可知, 统计三级截值模型有更强的寻址能力。

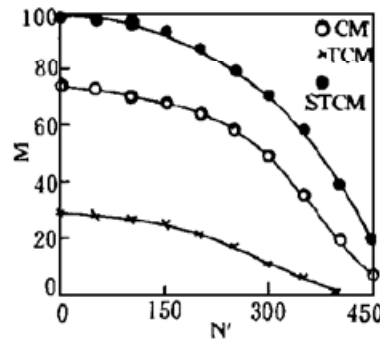
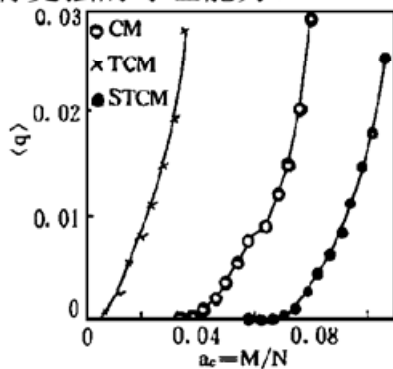


Fig. 1 The dependence of average error rates $\langle q \rangle$ on a_c for the clipped model, trinary clipped model and statistical clipped model

Fig. 2 The dependence of stored patterns number M on noise N' for the clipped model, trinary clipped model and statistical clipped model

4 结果讨论

从计算机模拟的结果可知, 截值模型的存储容量同文献的结果相当吻合, 但三级截值模型的模拟结果同文献[3]中的结果有很大出入。在文献[3]中, 作者是在网络规模 $N = 100$ 时得到 $a_c^* \approx 0.11$ 这一结果的。对于三级截值模型, 在 $N = 100$ 和满容量存储的条件下, 截值点 $C_1 = 11/3 = 3.7$, 但在网络规模 $N = 1024$ 时, 满容量条件下的截值点为 $C_2 = 29/3 = 9.6$ 。同有相同网络规模及存储模式数的统计三级截值模型的截值点 $C_1^* = 0.77 \times \sqrt{11} = 2.6$ 和 $C_2^* = 0.77 \times \sqrt{29} = 4.1$ 相比, 当网络规模较小时 ($N = 100$ 时), 三级截值模型与统计三级截值模型截值点的值相当接近, 随着网络规模的增大, 截值点的值的差别明显增大。从统计学来讲, 由于存储模式为随机模式, 互连矩阵元素值的分布统计上服从于正态分布, 此时绝大多数互连矩阵元的值介于 $-M/3 \sim M/3$ 之间, 经三级截断后, 这一部分互连矩阵元的值变为 0。从而降低了互连权重中的信息含量, 导致三级截值模型的性能下降。在网络规模较

小时, 三级截值模型截值点的值与统计三级截值模型的截值点很接近。因此, 可以说三级截值模型是统计三级截值模型在网络规模较小时的一个特例。上面三种模型的对比分析证实了作者建立统计三级截值模型理论的正确性。

结 论 针对截值模型和三级截值模型存储容量及寻址能力较低的缺点, 作者用统计学方法讨论了获得最佳截值点的方法。在不增加互连权重灰度阶的前提下, 提高了神经网络的性能。由于互连权重只有三个值, 放宽了对空间光调制器精度的要求, 因此用已有的双极互连权重编码方法(如光束方向编码方法^[5]), 可以很容易硬件实现统计三级截值模型。从这一点上来说, 统计三级截值模型是一种较理想的光学神经网络模型。

参 考 文 献

- [1] D. Psaltis, N. Farhat, Optical implementation of the Hopfield model. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(2) : 1469~ 1478
- [2] 黄五群, 高成群, 陈天仑等, 一种适于光学实现的非线性神经网络模型及其蒙特卡洛学习算法. *光学学报*, 1990, **10**(5) : 446~ 451
- [3] 路明哲, 战元龄, 王许明等, 单通道实现三级截值模型的光学神经网络系统. *光学学报*, 1992, **12**(7) : 631~ 636
- [4] 杨行峻, 郑君里, 人工神经网络, 高等教育出版社, 1989 : 340~ 352
- [5] 常胜江, 申金媛, 张延焯, 分区适应截值模型及其在交通标志识别中的应用. *光学学报*, 1996, **16**(12) : 1749~ 1756

A Statistical Trinary Clipped Model Based on Minimum Energy

Chang Shengjiang¹ Yang Jianwen² Shen Jinyuan¹
 Jin Chenghai² Zhang Yanxin¹

[1, *Optical Information Science Laboratory, Nankai University, Tianjing 300071*
 2, *Institute of Modern Optics, Nankai University, Tianjin 300071*]

(Received 27 September 1996; revised 24 February 1997)

Abstract A statistical trinary clipped model based on minimum energy is constructed by using statistical method. This model removes the difficulty of the Hopfield model in displaying the interconnection weights with a lot of levels of grayness, and improves the storage capacity and address ability comparing with the clipped model and the trinary clipped model.

Key words statistical trinary clipped model, storage capacity, address ability.