

# 湍流路径积分参量与湍流大气中光的传播效应

饶瑞中

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

**摘 要** 根据光波在湍流大气中传播的理论分析了弱起伏条件下决定光波传播效应的折射率结构常数  $C_n^2$  的各种路径积分参量之间的关系, 导出了由光波的强度起伏所确定的等效折射率结构常数对计算大气相干长度与光波的到达角起伏、光束的扩展及漂移的相对偏差的表达式。针对折射率结构常数  $C_n^2$  具有周期性、递减、递增和随机分布的典型湍流路径, 详细分析了各相对偏差的特征。对周期性湍流路径, 各相对偏差的绝对值随  $C_n^2$  路径起伏振幅的增大而增大; 随  $C_n^2$  路径变化频率的增大作阻尼振荡并迅速趋于零。对应于递减和递增路径, 存在着相当大的相对偏差。对应于随机路径, 各相对偏差的时间序列呈现出强烈的随机特征, 它们的时间序列统计均方根值随路径上独立变化的湍流区间数的增大而迅速减小。根据上述结果提出了提高湍流大气中光波综合传播效应分析的可靠性的方法。

**关键词** 光传播, 大气湍流, 随机介质。

## 1 引 言

光波在湍流大气中各种传播效应的理论<sup>[1, 2]</sup>与实验研究工作都已广泛开展。虽然理论上已经获得了弱起伏条件下非均匀湍流路径上的各种效应的解析解, 但由于测定非均匀湍流路径上的折射率结构常数  $C_n^2$  非常困难, 绝大部分实验工作都假设湍流路径上  $C_n^2$  均匀分布。这样可利用某种波长的束状光波(通常采用激光)在湍流大气中的某种传播效应(如强度起伏)来测定折射率结构常数  $C_n^2$ , 从而用来分析这个波长上其它传播效应(如到达角起伏、光束扩展及漂移等)或其它波长的光束的传播效应。按照光波在湍流大气中传播的理论, 在弱起伏条件下, 光波的各种传播效应取决于折射率结构常数  $C_n^2$  的各种不同的路径积分值。因而, 从某种传播效应在  $C_n^2$  随路径均匀分布的假设下获得的折射率结构常数只能看作是某种等效的平均值。而用这种等效的折射率结构常数分析其他传播效应的适用性依赖于  $C_n^2$  随传播路径的实际分布, 这种适用性将因传播效应的种类和湍流路径的种类而异, 须通过定量的数值分析确定其适用程度。

安徽光学精密机械研究所大气光学实验室的联合测量实验证实了折射率结构常数  $C_n^2$  随传播路径的非均匀分布, 它对湍流大气中光波传播效应的研究有重要作用, 因此必须加以考

考虑。为对这种非均匀性的影响进行确切的了解,本文分析了光波的各种传播效应所依赖的  $C_n^2$  的路径积分参量之间的关系,并针对四种典型的湍流路径详细分析由光波的强度起伏所确定的折射率结构常数对分析大气相干长度与光波的到达角起伏、光束的扩展及漂移等传播效应的适用性。

## 2 折射率结构常数 $C_n^2$ 的路径积分参量

根据光波在湍流大气中传播的理论<sup>[1]</sup>,在弱起伏条件下,光波的到达角起伏与折射率结构常数  $C_n^2$  的下列路径积分参量有关(为使分析结果具有一般性,本文使用归一化路径变量  $x$ ,其取值范围为 0~ 1):

$$P_1 = \int_0^1 C_n^2(x) dx \quad (1)$$

光波的强度和相位起伏与  $C_n^2$  的下列的路径积分参量有关:

$$P_2 = \int_0^1 (1-x)^{5/6} C_n^2(x) dx \quad (2)$$

一定的短程条件下的光束扩展及漂移与  $C_n^2$  的下列的路径积分参量有关:

$$P_3 = \int_0^1 (1-x)^{5/3} C_n^2(x) dx \quad (3)$$

一定的长程条件下的光束扩展及漂移与  $C_n^2$  的下列的路径积分参量有关:

$$P_4 = \int_0^1 (1-x)^2 C_n^2(x) dx \quad (4)$$

在自适应光学中<sup>[3]</sup>,湍流大气的相干长度与  $C_n^2$  的路径积分参量  $P_1$  有关,湍流大气的等晕角与  $C_n^2$  的路径积分参量  $P_3$  有关。

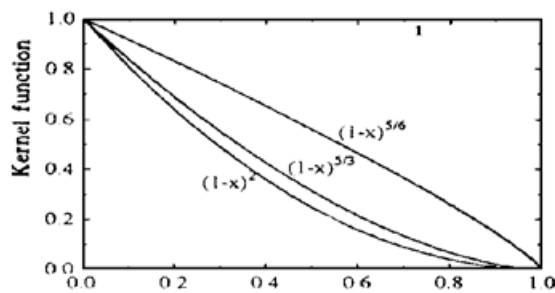


Fig. 1 The kernel functions for the path-integral parameters of the refractive index structure constant  $C_n^2$

折射率结构常数  $C_n^2$  的上述四个路径积分参量的核函数反映了光波的各种传播效应对  $C_n^2$  的路径分布的依赖关系。图 1 绘出了整个路径上四种核函数的分布。从图中不难看出除  $P_3$  和  $P_4$  较接近外(二者对应于不同条件下的同一效应),其他核函数之间明显相互偏离,因此由任一路径积分参量获得的等效折射率结构常数计算其他路径积分参量时都将引起明显的偏差。由于对应于光波的强度和相位起伏的路径积分参量  $P_2$  的核函数处于这四种路径积分参量的核函数的中心,因此,用由

$P_2$  获得的等效折射率结构常数来分析其他传播效应时将获得最佳的综合效果。因此下面的讨论就以参量  $P_2$  作为参照标准,导出由  $P_2$  获得的等效折射率结构常数来计算路径积分参量  $P_1$ 、 $P_3$  和  $P_4$  所引起的相对偏差。

当折射率结构常数  $C_n^2$  随路径均匀分布,即  $C_n^2(x)$  为常数时,它的四个路径积分参量  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  和  $P_4$  分别为  $C_n^2$ 、 $(6/11)C_n^2$ 、 $(3/8)C_n^2$  和  $(1/3)C_n^2$ 。因此对于非均匀湍流路径,在  $C_n^2$  随路径均匀分布的假设下,由积分参量  $P_2$  获得的等效折射率结构常数为:

$$(C_n^2)_{eqv} = \frac{11}{6}P_2 = \frac{11}{6} \int_0^1 (1-x)^{5/6} C_n^2(x) dx \quad (5)$$

由此等效折射率结构常数计算路径积分参量  $P_1$ 、 $P_3$  和  $P_4$  引起的相对偏差为:

$$R_1 = \frac{\frac{11}{6}P_2}{P_1} - 1 = \frac{\frac{11}{6} \int_0^1 (1-x)^{5/6} C_n^2(x) dx}{\int_0^1 C_n^2(x) dx} - 1 \quad (6)$$

$$R_3 = \frac{\frac{3}{8} \frac{11}{6} P_2}{P_3} - 1 = \frac{\frac{3}{8} \frac{11}{6} \int_0^1 (1-x)^{5/6} C_n^2(x) dx}{\int_0^1 (1-x)^{5/3} C_n^2(x) dx} - 1 \quad (7)$$

$$R_4 = \frac{\frac{1}{3} \frac{11}{6} P_2}{P_4} - 1 = \frac{\frac{1}{3} \frac{11}{6} \int_0^1 (1-x)^{5/6} C_n^2(x) dx}{\int_0^1 (1-x)^2 C_n^2(x) dx} - 1 \quad (8)$$

### 3 折射率结构常数 $C_n^2$ 非均匀分布的湍流路径

实际湍流大气中折射率结构常数  $C_n^2$  的路径分布可能是各种非常复杂的函数, 按统计规律而言可分为具有固定湍流结构的路径和具有随机湍流强度结构的路径。在具有固定湍流结构的路径中, 有着递增或递减趋势的路径对应于实际大气的高度分布, 这样予以专门处理; 其余则可进行傅里叶频谱分析。本文选择以下四种分布函数: 1) 周期函数; 2) 递减函数; 3) 递增函数; 4) 随机函数进行定量分析。图 2 绘出了前三种非均匀路径  $C_n^2$  的分布函数和在安徽光学精密机械研究所激光靶场 500 m 距离内的 21 个点上某一时刻  $C_n^2$  的实测值。从这些实测值可以看出,  $C_n^2$  一般是随路径非均匀分布的。

#### 3.1 周期性湍流路径

选择 Chebyshev 多项式表示折射率结构常数  $C_n^2$  的变化部分, 则折射率结构常数  $C_n^2$  随路径变化的关系为:

$$C_n^2(x) = C [1 + \epsilon \cos(m\pi x)] \quad (9)$$

式中  $|\epsilon| < 1$ ,  $m$  可取正整数, 也可取正实数。归一化的表达式具有二个可供选择的参数:  $\epsilon$  和  $m$  分别代表变化的幅度和频率。对于这种周期性路径, 由  $P_2$  获得的等效折射率结构常数计算  $C_n^2$  的路径积分参量  $P_1$ 、 $P_3$  和  $P_4$  的相对偏差为:

$$R_1 = \epsilon \operatorname{Re} M(1, 2 + 5/6, im\pi) \quad (10)$$

$$R_3 = \frac{1 + \epsilon \operatorname{Re} M(1, 2 + 5/6, im\pi)}{1 + \epsilon \operatorname{Re} M(1, 2 + 5/3, im\pi)} - 1 \quad (11)$$

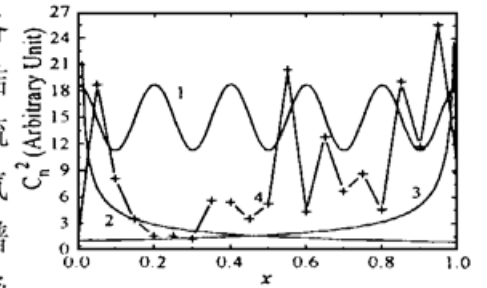


Fig. 2 The refractive index structure constant  $C_n^2$  as a function of the path: 1) periodic, 2) decreasing, 3) increasing, and 4) real measurement data

$$R_4 = \frac{1 + \epsilon \operatorname{Re} M(1, 2 + 5/6, im\pi)}{1 + \epsilon \operatorname{Re} M(1, 2 + 2, im\pi)} - 1 \quad (12)$$

式中  $M$  为合流超几何函数,  $i$  为虚数符号,  $\operatorname{Re}$  表示取实部。

### 3.2 递减和递增湍流路径

在实际大气中, 折射率结构常数  $C_n^2$  的高度分布是复杂的, 一般随高度的增加而减小, 对于从地面向上传播的光所经过的路径  $C_n^2$  可看作是递减函数; 对于从天空向下传播的光所经过的路径  $C_n^2$  可看作是递增函数。 $C_n^2$  的递减函数可表示为<sup>[4]</sup>:

$$C_n^2(x) = C x^{-2/3} \exp(-ax) \quad (13)$$

相应地,  $C_n^2$  的递增函数可表示为:

$$C_n^2(x) = C(1-x)^{-2/3} \exp(ax) \quad (14)$$

对于递减路径, 由  $P_2$  获得的等效折射率结构常数计算  $C_n^2$  的路径积分参量  $P_1$ 、 $P_3$  和  $P_4$  的相对偏差为:

$$R_1 = \frac{11}{6} \frac{30}{7} \frac{\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6)} M\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{6}, -\alpha\right) - 1 \quad (15)$$

$$R_3 = \frac{3}{8} \frac{11}{6} \frac{30}{7} \frac{\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6)} M\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{6}, -\alpha\right) - 1 \quad (16)$$

$$\frac{5}{27} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) 3M\left(\frac{1}{3}, 3, -a\right)$$

$$R_4 = \frac{1}{3} \frac{11}{6} \frac{30}{7} \frac{M(5/6)\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6)} M\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{6}, -\alpha\right) - 1 \quad (17)$$

$$\frac{81}{14} M\left(\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, -a\right)$$

式中  $\Gamma$  为伽玛函数。对于递增路径, 由  $P_2$  获得的等效折射率结构常数计算  $C_n^2$  的路径积分参量  $P_1$ 、 $P_3$  和  $P_4$  的相对偏差为:

$$R_1 = \frac{11}{21} \frac{M(1, 13/6, a)}{M(1, 4/3, a)} - 1 \quad (18)$$

$$R_3 = \frac{66}{56} \frac{M(1, 13/6, a)}{M(1, 3, a)} - 1 \quad (19)$$

$$R_4 = \frac{11}{9} \frac{M(1, 13/6, a)}{M(1, 10/3, a)} - 1 \quad (20)$$

### 3.3 随机湍流路径

从图 2 中折射率结构常数  $C_n^2$  随路径分布的实测值可以看出, 实际湍流路径以随机分布进行数值分析较为合适。在本文的数值分析中, 将整个湍流路径看作  $N$  个独立变化的区间, 它们具有相同的谱分布和不同的湍流强度, 每个区间的湍流强度随机分布。

## 4 由光强起伏测定折射率结构常数的适用性分析

据前面的分析, 用参量  $P_2$  获得的等效折射率结构常数用来分析其他传播效应时, 综合效果最为理想。实际上光波的强度起伏常用来测定传播路径上的湍流特性, 如湍流强度和谱分布<sup>[5]</sup>。针对上节选定的几种典型湍流路径, 现将光强起伏测定的折射率结构常数的适用性进行数值分析。依据上节导出的公式计算相对偏差  $R_1$ 、 $R_3$  和  $R_4$  与各种路径参数的关系。图 3 至图 5 详细描绘了这些关系。

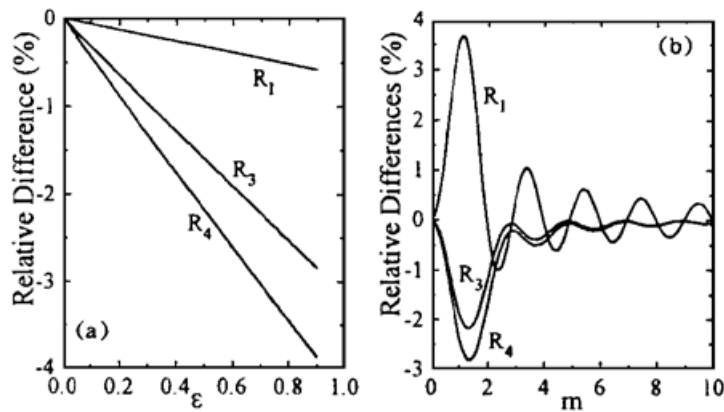


Fig. 3 Relative differences  $R_1$ ,  $R_3$ , and  $R_4$  for the periodic turbulent path as functions of (a) the amplitude parameter  $\epsilon$  at  $m = 4$ , and (b) the frequency parameter  $m$  at  $\epsilon = 0.1$

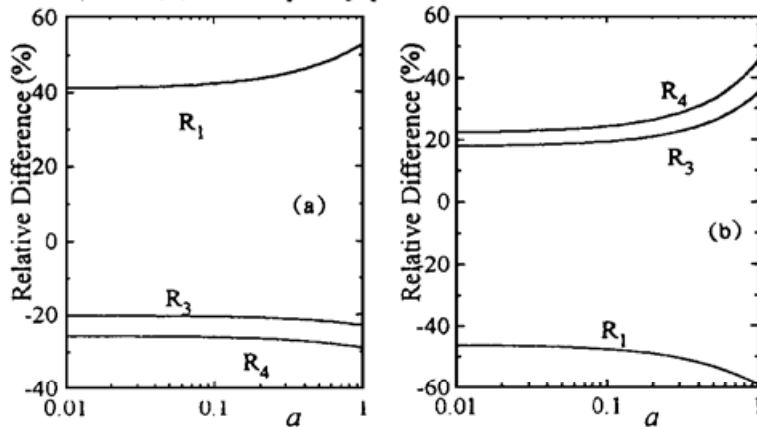


Fig. 4 The relative differences  $R_1$ ,  $R_2$ , and  $R_4$  as functions of the parameter  $\alpha$  of (a) the decreasing, and (b) the increasing turbulent path

在实际大气环境中存在周期性湍流路径的可能性是很小的, 但如果传播路径具有固定的湍流结构, 则可对其进行傅里叶频谱分析, 从而转化为周期性湍流路径的叠加。本文选择的 Chebyshev 多项式表示的路径具有振幅参数  $\epsilon$  和频率参数  $m$ ; 通过选择不同的参数, 可以获得各种可能的周期路径。实际上, 频率参数  $m$  也可以取非整数, 这样的路径将具有非完整的周期。

从图 3 可以看出, 对周期性路径, 在一定的变化频率下, 各路径积分参量的相对偏差近似为振幅参数  $\epsilon$  的线性函数, 其绝对值随  $\epsilon$  的增大而单调增大; 而对于一定的振幅参数, 它们则随频率参数  $m$  的增加作阻尼振荡并趋于零。从(b)可以看出, 当整个路径的频率参数大于 10 时, 各相对偏差可忽略不计。显然对于具有固定湍流结构的非周期性湍流路径, 其傅里叶频谱的低频部分起着主要的作用。

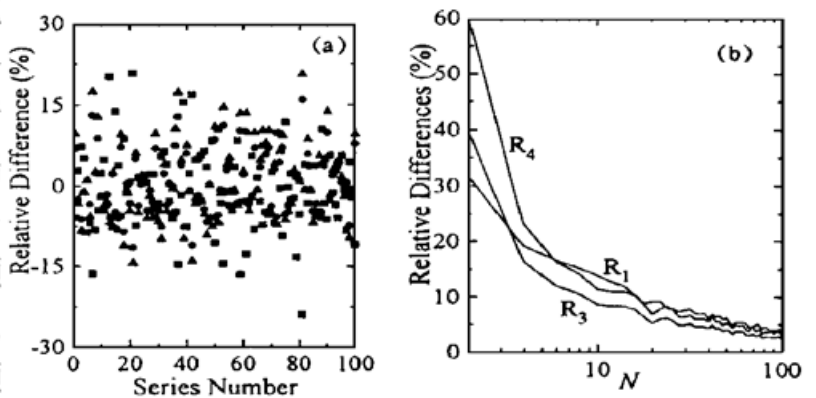


Fig. 5 The relative differences  $R_1$ ,  $R_3$ , and  $R_4$  as functions of (a) time series number at  $N = 16$ , square, circular, and triangle points represent  $R_1$ ,  $R_3$ , and  $R_4$  respectively, and (b)  $N$ , the number of the independent turbulent intervals for a random turbulent path

值得注意的是, 由于周期性路径的振荡性, 由折射率结构常数  $C_n^2$  的路径积分参量  $P_2$  估计参量  $P_1$  具有不确定性, 在某些路径变化频率上会给出过高的估计值, 而在另外的频率上将会给出过低的估计值。另一方面, 虽然由参量  $P_2$  估计参量  $P_3$  和  $P_4$  也具有振荡性, 但总是给出过低的估计值。这种振荡特性和下面的递减和递增路径明显不同。

递减和递增路径对实际大气中光的斜程传播以及自适应光学具有重要意义, 这种路径只与一个参数  $a$  有关。从图 4 可以看出, 各相对偏差的绝对值都随参数  $a$  的增大而增大, 两种路径的趋势基本完全一致。而对折射率结构常数  $C_n^2$  的各路径积分参量的偏高或偏低的估计而言, 两种路径的趋势基本完全相反: 对递减路径, 由参量  $P_2$  估计参量  $P_3$  和  $P_4$  会给出过低的值, 而估计参量  $P_1$  会给出过高的值; 对递增路径, 情况恰恰相反。值得注意的是, 当参数  $a$  非常小时, 各相对偏差的值也相当高, 分别达 20% 和 40% 以上, 而随参数  $a$  的增大, 各相对偏差的值也增大。在实际大气中, 对于整层的向上或向下传播路径, 参数  $a$  的值一般都大于 1, 从图中不难看出, 这对应于非常大的相对偏差。

随机路径的特点来源于其随机性, 它的统计特性取决于路径上独立变化的湍流区间数  $N$ 。图 5(a) 表示的是相对偏差  $R_1$ 、 $R_3$  和  $R_4$  在  $N = 16$  时的时间序列变化情况。可以看出, 在  $N$  固定的情况下, 随机路径的各相对偏差值都同样呈现出强烈的随机特征。但当对各相对偏差值的时间序列进行统计平均后, 它们的均方根值与  $N$  有着明显的依赖关系, 如图 5(b) 所示, 当独立变化的湍流区间数增大时, 各偏差函数的均方根值(对 100 次时间序列进行统计平均)迅速减小, 近似指数关系。这与湍流的全局间歇性对光传播的影响相似。数值模拟结果认为, 湍流的全局间歇性对光传播的影响很小<sup>[6]</sup>。注意到近地面湍流的全局间歇性具有约 50 m 的尺度<sup>[7]</sup>, 而光传播距离具有千米的量级, 全局间歇性的特性数约为 20, 这可与图 5(b) 相参照。

综上所述, 可见不论对具有固定湍流结构的路径还是具有随机湍流强度结构的路径, 各相对偏差与路径的变化频率密切相关。对前一种路径, 这种变化频率对应于其傅里叶频谱; 对后一种路径, 这种变化频率对应于路径上独立变化的湍流区间数。总的来说, 当整个路径的变化超过半个周期时, 变化频率越高, 各相对偏差越小。

**结 论** 本文根据光波在湍流大气中传播的理论, 分析了弱起伏条件下决定光波的各种传播效应的折射率结构常数  $C_n^2$  的各种路径积分参量的关系, 导出了由光波的强度起伏所确定的折射率结构常数对计算光波的相干长度与到达角起伏、光束的扩展及漂移的相对偏差的表达式。针对  $C_n^2$  具有周期函数、递减函数、递增函数和随机函数分布的四种典型路径, 详细计算了  $C_n^2$  的各路径积分参量的相对偏差  $R_1$ 、 $R_3$  和  $R_4$  与各种路径参数的关系。从中发现: 在路径均匀的假设下从一种传播效应获得的等效折射率结构常数分析其他传播效应的适用性依赖于  $C_n^2$  随传播路径的实际分布, 这种适用性将因传播效应的种类和湍流路径的种类而异。总的来说, 各相对偏差与湍流路径的变化频率密切相关, 当整个路径的变化超过半个周期时, 变化频率越高, 各相对偏差越小。也就是说, 对周期性湍流路径, 各相对偏差的绝对值随  $C_n^2$  路径起伏振幅的增大而增大; 随  $C_n^2$  路径起伏频率的增加作阻尼振荡并迅速趋于零。对于递减和递增路径, 存在着相当大的相对偏差; 对应于随机路径, 各相对偏差的时间序列呈现出强烈的随机性, 它们的时间序列统计平均值随独立变化的湍流区间数的增大而迅速减小。

从以上数值分析结果不难看出, 为了可靠地确定光波的各种传播效应, 必须: 1) 如果使

用光波的某一种传播效应测定折射率结构常数, 应抛弃  $C_n^2$  随路径均匀分布的假设, 根据这种效应的空间分布来反演  $C_n^2$  的路径分布, 而不是等效的平均值; 2) 使用诸如温度脉动仪直接测量  $C_n^2$  的路径分布。因为空间上连续的观测实际上是难以实现和不必要的, 这牵涉到观测点的布设问题, 本文获得的相对偏差  $R_1$ 、 $R_3$  和  $R_4$  与各种路径参数的关系可以为此问题提供有益的指导。例如, 对周期性湍流路径, 当变化的频率很大时, 各种相对偏差是可以忽略的, 因此在相对偏差等于给定的实验偏差下的频率参数可以当作观测点的布设判据。

### 参 考 文 献

- [1] R. L. Fante, Electromagnetic beam propagation in turbulent media. *Proc. IEEE*, 1975, **63**(12) : 1669 ~ 1692
- [2] J. W. Strohbehm, Laser Beam Propagation in the Atmosphere, Berlin, Springer-Verlag, 1978
- [3] D. L. Fried, Anisoplanatism in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1) : 52~ 61
- [4] 宋正方, 应用大气光学基础. 北京, 气象出版社, 1990
- [5] R. Frehlich, Laser scintillation measurements of the temperature spectrum in the atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, 1992, **49**(16) : 1494~ 1509
- [6] R. Frehlich, Effects of global intermittency on laser propagation in the atmosphere. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(24) : 5764~ 5769
- [7] L. Mahrt, Intermittency of atmospheric turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 1989, **46**(1) : 79~ 95

## Turbulence Path-Integral Parameters and Light Propagation Effects in Turbulent Atmosphere

Rao Ruizhong

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)

(Received 1 February 1996)

**Abstract** The relationship between the light propagation effects in the turbulent atmosphere and the path-integral parameters of the refractive index structure constant  $C_n^2$  is analyzed with the theory of light propagation in the turbulent atmosphere. The path-integral parameters of  $C_n^2$  corresponding to the coherent length, the fluctuation of the arriving angle, the spreading and wandering of light beam are obtained with the equivalent refractive index structure constant derived from the measurement of the light intensity fluctuation, and the relative differences of these parameters with true values are evaluated. For periodic, decreasing, increasing, and random turbulent paths the relative differences are calculated as functions of various path parameters. The relative differences for the periodic turbulent path increase with the amplitude parameter and behave as damped oscillations with the frequency parameter. The relative differences for the decreasing and the increasing turbulent path are quite high. For a random turbulent path, the relative differences fluctuate with time series number and their statistical average values decrease with the number of the independent turbulent intervals. Suggestions for the accurate evaluation of the optical turbulence effects are given according to the results.

**Key words** light propagation, atmospheric turbulence, random media.