第 17 卷 第 1 期　　光 学 学 报　　Vol. 17, No. 1
1997 年 1 月　　ACTA OPTICA SINICA　　January, 1997

自傅里叶函数构造法则的研究*

华建文　刘立人
(中国科学院上海光学精密机械研究所信息光学研究室, 上海 201800)

摘　要　研究自傅里叶函数的构造法则, 给出了和 Caola 的法则互为补充的法则: $f(x) = g(x)g(-x) + g^F(x) * g^F(-x)$。分析了它的优缺点。最后, 导出了构造自傅里叶函数法则的最简表达式。

关键词　傅里叶,　函数构造。

1　引　　言

自傅里叶函数是这样的一类函数: 其傅里叶变换后函数形式与原函数相同。用数学语言来表达就是: 如函数 $f(x)$ 的傅里叶变换

$$f^F(u) = \int f(x)\ \exp(-j2\pi ux)\ \mathrm{d}x = f(u), \tag{1}$$

则 $f(x)$ 为自傅里叶函数。原来人们只知道两个自傅里叶函数。它们是高斯函数和狄拉克梳状函数。1991 年 Caola[1] 指出有无穷多的自傅里叶函数。他给出了构造自傅里叶函数的一种法则, 即为: 对于任意可傅里叶变换的函数 $g(x)$, 下列函数

$$f(x) = g(x) + g^F(x) + g(-x) + g^F(-x) \tag{2}$$

便是自傅里叶函数。$g^F(x)$ 表示函数 $g(x)$ 的傅里叶变换。在这一法则的启示下, Lohmann 和 Mandlovic 在光学领域里使用类似的法则产生了光学中的其它几个自变换函数[2], 如离散自傅里叶函数, 自分数 Talbot 函数等。还给出了也能实现自傅里叶变换的奇数次循环的光学变换装置[3]。1994 年, Mendlovic, Lohmann 和 Ozaktas 又把它推广到分数自傅里叶变换[4] 并对自傅里叶变换函数的成像特性作了较为详细的研究[5]。Cincotti, Santarriero[6] 及 Lakhlakia[7] 等人也作了这方面的研究。Lipson[8], Banerjee[9] 等人给出了光学领域中两个自傅里叶函数的实例。这些都说明了自傅里叶函数近年来从理论到实践一直在不断发展。

2　构造自傅里叶函数的“两项积”法则

在自傅里叶函数的发展过程中, Caola 给出的法则(即(2)式)起了奠基的作用。后来的理论都是以它为基础的。但是检查一下(2)式可发现, 如发生函数 $g(x)$ 为一奇函数, $f(x)$ 将恒

*　本研究得到国家自然科学基金的资助。
收稿日期: 1996 年 1 月 15 日; 收到修改稿日期: 1996 年 3 月 21 日

为 0。也就是说，用这一法则构造自傅里叶函数时，发生函数如为奇函数，得到的自傅里叶函数将是没有实际意义的。有时候，$g(x)$ 即使不是纯粹的奇函数，例$[1+\sin(fx)]/2$，它表示一块正弦光栅，代入(1) 式来产生自傅里叶函数也没有多少意义。光栅的信号项为 $\sin(fx)$，而得到的结果却和 $g(x)$ 等于 1/2 得到的结果一模一样，完全失去了发生函数的光栅特征信号。为了克服这种构造法则的不足，作者寻找了另外一些构造傅里叶函数的法则，其中较为简单的基本方法就是利用两项积来产生自傅里叶函数，简称为“两项积”法则。表达如下:

设 $g(x)$ 为傅里叶变换函数，则函数

$$f(x) = g(x)g(-x) + g^F(x) * g^F(-x) \tag{3}$$

为自傅里叶函数。式中“*”表示卷积。其证明和 Caola 的方法一样简单。因为(3) 式的傅里叶变换

$$\begin{aligned} f^F(u) &= g^F(u) * g^F(-u) + [g^F(u)]^F[g^F(-u)]^F \\ &= g^F(u) * g^F(-u) + g(-u)g(u) \\ &= g(u)g(-u) + g^F(u) * g^F(-u), \end{aligned} \tag{4}$$

令(3) 式中的 x 为 u 并与(4) 式对照，显然有

$$f^F(u) = f(u)。$$

这符合自傅里叶函数的定义[见(1) 式]。因而(3) 式两项积所构成的函数的确是自傅里叶函数。下面是两个用(3) 式构造的自傅里叶函数的例子:

$$1)\quad g(x) = \mathrm{rect}(2x + 1/2) - \mathrm{rect}(2x - 1/2)$$
$$f(x) = -\mathrm{rect}(x) - \mathrm{sinc}(x)$$

$$2)\quad g(x) = \mathrm{rect}(x)\sin(2(x)j \qquad j = \sqrt{-1}$$
$$\begin{aligned} f(x) = &\ \mathrm{rect}(x)\sin^2(2\pi x) - \mathrm{sinc}(x+2)/4 \\ &+ \mathrm{sinc}(x)/2 - \mathrm{sinc}(x-2)/4 \end{aligned}$$

第一个例子见图 1 所示，图中虚线表示发生函数 $g(x)$，它是两个方形函数组成的一个奇函数，实线表示由它按“两项积”法则即(3) 式构成的自傅里叶函数 $f(x)$。

在第二个例子中发生函数是正弦函数的一个周期，它显然是一个奇函数，由它按“两项积”构成的自傅里叶函数仍然具有丰富的涵义(见图 2)。

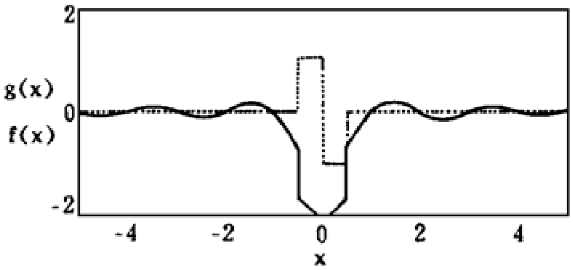

Fig. 1 The first example

$g(x) = \mathrm{rect}(2x + 1/2) - \mathrm{rect}(2x - 1/2)$, $f(x) = g(x)g(-x) + g^F(x) * g^F(-x)$

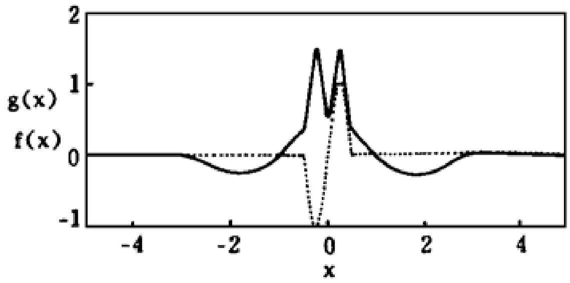

Fig. 2 The second example

$g(x) = \mathrm{rect}(x)\sin(2\pi x)j$, $f(x) = g(x)g(-x) + g^F(x) * g^F(-x)$

3 对“两项积”法则的讨论

“两项积”法则的优点在于用偶函数、奇函数、或非奇非偶函数作为发生函数都能产生有意义的自傅里叶函数。当然它也不是完美无缺的。它的不足之处是当 $g(x)$ 为某些特别的非对称断续函数时，例

$$g(x) = \mathrm{rect}\,(x - 1/2)$$

或

$$g(x) = \mathrm{comb}\,(x - 1/4)$$

等，也会产生无意义的自傅里叶函数。因而，本文提出“两项积”法则，目的不是取代 Caola 的法则。它们是一对简单而相互补充的构造法。使用时可根据需要合理选用。另外也可用这两种构造法则的组合来产生另一些复杂的构造法则，例如：

$$f(x) = g^2(x)g(-x) + g(x)g^2(-x) + g^F(x) * g^F(x) * g^F(-x) + g^F(x) * g^F(-x) * g^F(-x)$$

或

$$f(x) = g(x) + g(x)g(-x) + g(-x) + g^F(x) + g^F(x) * g^F(-x) + g^F(-x)$$

显然，如合理使用两种方法的组合，既可消除 $g(x)$ 为奇函数带来的问题，又可消除 $g(x)$ 为非对称断续函数时产生的问题。

4 自傅里叶函数的最简构造法

对于同样能构造自傅里叶函数的法则总是越简越好。寻找最简单的构造法是本节的目的。构造一个函数就是选择一种运算法则来联系变量和因变量，而变量又可以是另一变量的函数，这就是说也可以对一些函数作某些运算法来构成另一个函数。由于加法运算最简单并且在构造各种函数时构造任意函数是最容易的，因而如果选用一个加法操作将两个任意函数联系起来再加上必须的约束条件使之成为所需函数将是构造函数的最简方法。设 $e(x)$ 和 $b(x)$ 为任意函数，如果它们的和函数

$$f(x) = e(x) + b(x), \tag{5}$$

要成为自傅里叶函数，则 $e(x)$ 及 $b(x)$ 必须满足下面讨论的约束条件。由于 $f(x)$ 应为自傅里叶变换函数，则它必然是可傅里叶变换的。因而 $e(x)$ 及 $b(x)$ 要么都是可傅里叶变换的，要么都是不可傅里叶变换的(把(5)式写成 $e(x) = f(x) - b(x)$ 就可以看到这一点)。由于工程上的绝大多数函数都是可傅里叶变换的，因而只对可傅里叶变换的函数感兴趣。设 $e(x)$ 及 $b(x)$ 都为可傅里叶变换的函数。对(5)式进行傅里叶变换，有：

$$f^F(x) = e^F(x) + b^F(x)。 \tag{6}$$

由于 $f(x)$ 为自傅里叶函数，即 $f(x)$ 必须等于 $f^F(x)$，从(5)式和(6)式可看到 $e(x)$ 及 $b(x)$ 必须满足的约束条件为

$$e(x) + b(x) = e^F(x) + b^F(x) \tag{7}$$

把(7)式重写，有：

$$e(x) - b^F(x) = e^F(x) - b(x) \tag{8}$$

令 $e(x)$ 与 $b^F(x)$ 之差函数为 $c(x)$，则上述约束方程可写成

$$e(x) = b^F(x) + c(x)$$

及 $$b(x) = e^F(x) - c(x)。$$

自然, 取 $c(x) = 0$ 最为简单。这时约束方程就转化为

$$b(x) = e^F(x) \tag{9}$$

及 $$e(x) = e(-x)。\tag{10}$$

(10) 式要求 $e(x)$ 为偶函数。把(9) 式代入(5) 式得到自傅里叶函数的最简构造法则:

$$f(x) = e(x) + e^F(x), \tag{11}$$

式中 $e(x)$ 为任意一个可傅里叶变换偶函数。这样构造自傅里叶函数便转化成了构造偶函数。从而使问题简单化了。而构造偶函数的最基本最简单的法则是用和式 $g(x) + g(-x)$ 及用乘积 $g(x)g(-x)$。如用 $g(x) + g(-x)$ 和 $g(x)g(-x)$ 代入(11) 式相应地就得到 Caola 的法则及"两项积"法则。当然也可以利用(11) 式构造复杂的法则, 例如令 $e(x) = g_1(x)g_2(-x) + g_1(-x)g_2(x)$ 代入(11) 式便构成一较复杂的法则。

从数学角度来看, (11)、(2) 及(3) 式表示的三种方法中, (11) 式的运算最简单。例如:

用(2) 式构造一个自傅里叶函数:

设 $$g(x) = \cos(2\pi x) + \sin(2\pi x),$$

则 $$\begin{aligned} f(x) &= \cos(2\pi x) + \sin(2\pi x) + [\cos(2\pi x) + \sin(2\pi x)]^F \\ &\quad + \cos(-2\pi x) + \sin(-2\pi x) + [\cos(-2\pi x) + \sin(-2\pi x)]^F \\ &= 2\cos(2\pi x) + \delta(x-1) + \delta(x+1)。\end{aligned}$$

用(3) 式构造一个自傅里叶函数:

设, $$g(x) = \sqrt{2\cos(2\pi x)},$$

则 $$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2\cos(2\pi x)}\sqrt{2\cos(-2\pi x)} + [\sqrt{2\cos(2\pi x)}]^F * [\sqrt{2\cos(-2\pi x)}]^F \\ &= 2\cos(2\pi x) + \delta(x-1) + \delta(x+1)。\end{aligned}$$

用(11) 式构造一个自傅里叶函数:

设 $$e(x) = 2\cos(2\pi x),$$

则 $$f(x) = 2\cos(2\pi x) + [2\cos(2\pi x)]^F = 2\cos(2\pi x) + \delta(x-1) + \delta(x+1).$$

如果这些构造法都用光学法来完成, 则利用(11) 式构造自傅里叶函数的得益就更大。用光学法完成(11) 式, 只要对表示函数 $e(x)$ 的物体进行一次光学傅里叶变换然后与 $e(x)$ 一次光学相加。而用光学法来完成(2) 式则要对表示物体的函数 $g(x)$ 进行多次光学傅里叶变换然后进行三次光学相加, 或者用光学法产生 $g(x)$ 的圆对称函数 $g(-x)$ 然后对 $g(x)$ 和 $g(-x)$ 作傅里叶变换并进行三次加法。用光学法来完成(3) 式, 除了傅里叶变换和一次加法外还要构造圆对称函数和作光学乘法。由此看来若用光学法实现上述几种构造法的全过程, 繁简程度是大不相同的。

这些构造法则的用途和 Caola 的法则一样, 都是用来构造自傅里叶函数。自傅里叶函数在光学方面的用处在文献[2] 至文献[9] 中都有较为详细的叙述。这里不再赘述。

参 考 文 献

[1] M. J. Caola, Self-Fourier function. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, **24**(19): L1143~L1144

[2] A. W. Lohmann, david mendlovic, Self-Fourier objects and other self-transform objects. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1992, **9**(11): 2009~2012

[3] A. W. Lohmann, D. Mendlovic, An optical self-transform with odd cycles. *Opt. Commmun.*, 1992, **93**(1,2): 25~26

[4] David medlovic, Haldun M. Ozaktas, Adelf W. Lohmann, Self fourier functions and fractional Fourier trnsform. *Opt. Commun.*, 1994, **105**(1, 2): 36~38

[5] A. W. Lohmann, D. Mendlovic, Image formation of a self-Fourier object. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(2): 153~157

[6] Cincotti G, Gori F, Santarsiero M, Generalized self-Fourier functions. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1992, **25**(20): L1191~L1193

[7] Lakhtakia, Fractal self-Fourier fuctions. *Optik*, 1993, **94**(1): 51~52

[8] S. G. Lipson, Self-Fourier objects and other self-transform objects: commant. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(9): 2088~2089

[9] P. P. Banerjee, Ting-Chung Poon, Self-Fourier objects and other self-transform objects: comment. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(1): 425~426

Study of Constructing Self-Fourier Functions

Hua Jianwen Liu Liren

(*Information Optics Laboratory, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

(Received 15 January 1996; revised 21 March 1996)

Abstract This article studies the recipe of constructing Self-Fourier Functions (SFFs). A method complementary to the Caola's is given as $f(x) = g(x)g(-x) + g^F(x) * g^F(-x)$. Its advantage and disadvantage are discussed. The simplest expression of constructing recipe for SFFs is deduced.

Keywords Fourier, constructing function.