

# 声光双稳系统混沌的控制

刘金刚<sup>a, b</sup> 沈 柯<sup>b</sup> 周立伟<sup>a</sup>

a, 北京理工大学工程光学系, 北京 100081

b, 长春光学精密机械学院应用理学分院, 长春 130022

**摘 要** 对声光双稳(AOB)系统的混沌态提出参数连续延时反馈的控制技术。数值分析表明, 在一定的控制强度下, 这种控制使系统在原混沌区具有负的最大李亚普诺夫指数(MLE), 并且能够保证控制的目标状态是原系统的失稳不动点或不稳定周期轨道(UPO)。文章通过与实验结果比较, 验证了本控制方法的有效性。

**关键词** 混沌控制, 参数微扰控制方法, 不稳定周期轨道, 反馈控制, 李亚普诺夫指数, 声光双稳系统。

## 1 引 言

混沌控制是近几年人们感兴趣的研究内容之一。从 Ott 等人<sup>[1]</sup>在 1990 年提出参数微扰法(OGY 方法)控制混沌以来, 大量的改进方法及实验报道相继出现<sup>[2-14]</sup>, 但是关于光学混沌控制尤其是实验报道并不多, 因为混沌控制在光学中实现起来比较困难。1992 年 Roy 等人利用自适应比例反馈(OPF)技术实现了多模 YAG 激光系统混沌的控制<sup>[15]</sup>, 其实验装置很复杂。Pyragas<sup>[16]</sup>根据参数微扰控制思想, 使用自控制反馈微扰法对常微分系统的混沌进行数值模拟控制, 得到比较好的控制结果, 其方法在实验的实现上简单易行, 它不需要相空间重构, 而且控制的施加不必等待系统状态接近目标状态, 因而省去了控制中的跟踪计算。不过, Pyragas 的方法把控制加在状态量上, 在一些情况下很难实现。本文对此加以改进, 在延时微分系统中提出参数延时反馈控制法, 数值计算表明, 在一定的控制强度范围内, 受控系统具有负的最大李亚普诺夫(Lyapunov)指数, 分叉图表明受控状态是原系统混沌吸引子中的失稳不动点或不稳定周期轨道(UPOs), 在暂态过程之后控制量变为微扰量, 因而保证了受控系统的拓扑不变性。然后, 在声光双稳系统上建立了控制装置, 实现了光学混沌态在混沌吸引子中不稳定周期轨道的稳定控制, 实验结果与理论基本附合。

## 2 参数延时反馈控制

直接从声光双稳系统的动力学方程出发来说明参数延时反馈控制。以长延时布拉格型声光双稳系统为例, 其动力学方程为<sup>[17]</sup>:

$$dx(t)/dt = \left( -x(t) + \pi\{A - \lambda \sin^2[x(t - \tau_d) - x_b]\} \right) / \tau_0 \quad (1)$$

其中  $x(t)$  为状态变量;  $\tau_d$ 、 $\tau_0$  为系统延时时间和响应时间, 对长延时系统  $\tau_d \gg \tau_0$ ;  $\lambda$  为与入射光强及放大倍数有关的量, 一般作为分叉参数;  $A$ 、 $x_b$  为与放大器和驱动源偏置有关的量, 取为控制参数。控制量  $I_c$  取为:

$$I_c(t, k, \tau) = k[x(t) - x(t - \tau)] \quad (2)$$

其中  $k$  表示控制强度,  $\tau$  为是反馈延迟时间, 应取它等于控制的目标状态的周期。  $I_c$  可施加在  $A$  或  $x_b$  上, 控制方程分别为:

$$dx(t)/dt = \left( -x(t) + \pi\{A - I_c(t, k, \tau) - \lambda \sin^2[x(t - \tau_d) - x_b]\} \right) / \tau_0 \quad (3)$$

和

$$dx(t)/dt = \left( -x(t) + \pi\{A - \lambda \sin^2[x(t - \tau_d) - x_b + I_c(t, k, \tau)]\} \right) / \tau_0 \quad (4)$$

可以看到, 控制加在  $A$  上相当于对偏置(线性量)进行反馈控制, 加在  $x_b$  上相当于对相位(非线性量)的反馈控制。当  $k = 0$ , 相当于无控制, 取  $\tau_0 = 0.1 \mu\text{s}$ ,  $\tau_d = 5 \mu\text{s}$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $A = -0.5$ ,  $x_b = \pi/5$  作为初始条件(与实验值相对应)求解方程(1), 得到混沌解。波形及混沌吸引子, 见图 1(a) 或图 2(a) 段。其波形近似以自脉冲的周期  $2\tau_d = 10 \mu\text{s}$  为基波周期进行混沌振荡(由于从自脉冲到混沌时分叉参数  $\lambda$  的改变导致二者不严格相等)。

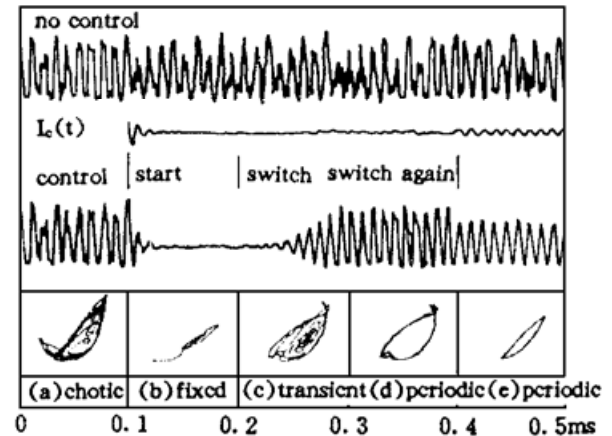
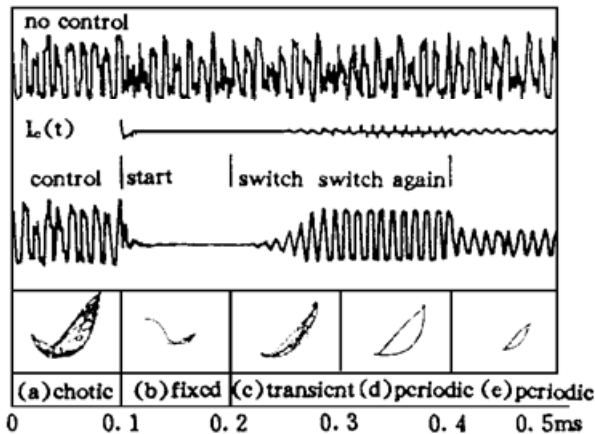


Fig. 1 Chaos control diagram: control added on parameter  $A$ , where: (a) no control case, (b)  $k = 0.2$  and  $\tau = \tau_d$ , (c) and (d)  $k = 0.2$  and  $\tau = 2\tau_d$ , (e)  $k = 0.1$  and  $\tau = \tau_d$

Fig. 2 Chaos control diagram: control added on parameter  $x_b$ , where: (a) no control case, (b)  $k = 0.4$  and  $\tau = \tau_d$ , (c) and (d)  $k = 0.4$  and  $\tau = 2\tau_d$ , (e)  $k = 0.2$  and  $\tau = \tau_d$

要使混沌控制在不动点即双稳的一支, 选择  $\tau = \tau_d$  来控制, 当  $k = 0.2$  和  $0.4$  时, 方程(3)和(4)分别给出稳定解, 见图 1(b) 和图 2(b) 段。适当加大控制强度  $k$ , 控制状态仍保持稳定而不被推离到其他混沌区; 撤掉控制即令  $k = 0$ , 系统状态很快变为混沌, 吸引子形状同图 1(a) 保持不变。  $k$  从  $0.2$  (或  $0.4$ ) 减小时, 不动点逐渐变成周期态, 见图 1(e) 或图 2(e) 段, 一般情况下它与原系统混沌吸引子中的不稳定周期轨道有所不同。后面可以从分叉图看到这一点(见图 3), 在不需要严格保持系统不变性时, 这时的控制是可取的, 它可以通过改变控制强度来选择不同的周期幅度, 这在实际应用中很有用。当  $k$  减小到一极限值  $k_{lim} \cong 0.04$  时, 控制失效。

为说明控制过程中系统的分叉状态和稳定性, 以  $\tau_d$  为迭代周期针对方程(3)作分叉图并计算相应的李指数, 方程由(5)式和(6)式给出, 图示见图 3。

$$x_{n+1}(t') = [\pi / (1 + \pi k)] \{A_0 + kx_n(t') - \lambda \sin^2[x_n(t') - x_b]\} \quad (5)$$

$$\lambda_{MLE} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \log \left| \frac{\pi}{1 + \pi k} \{k - \lambda \sin [2x_n(t') - 2x_b]\} \right| \quad (6)$$

其中  $0 \leq t' \leq \tau_d$ ,  $x_n = x(t' + n\tau_d)$ 。

由于自脉冲频率为  $1/2\tau_d$ , 图中第一分叉点  $A$  之前对应不动点, 第二分叉点  $B$  与  $A$  之间是自脉冲周期 1, 第三分叉点  $C$  与  $B$  之间是周期 2, 等等。可以看到, 在  $\lambda = 0.8$  处, 控制状态当  $k = 0.2$  时为系统失稳的不动点并因系统具有负的李指数而保持稳定, 随着  $k$  的减小变为周期态以至混沌而失控。

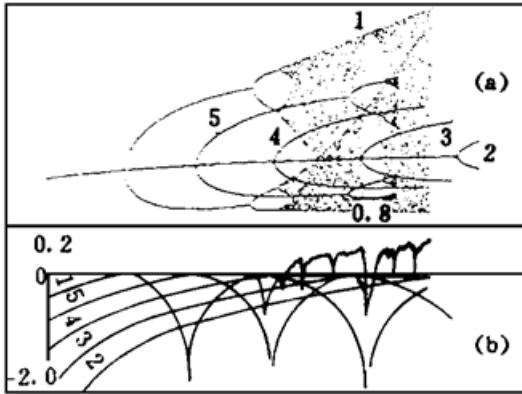


Fig. 3 Bifurcation diagrams of controlled system and its MLEs, (a) bifurcation diagrams (b) MLEs. where : 1. for uncontrolled case, 2, 3, 4, 5 for  $\tau = \tau_d$  and  $k = 0.2, 0.15, 0.1, 0.05$ , respectively

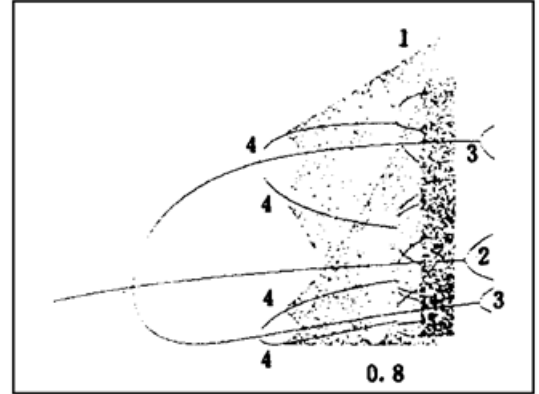


Fig. 4 Bifurcation diagrams of controlled states with different control periods where: 1. for uncontrolled state, 2, 3, 4 for  $k_p = 0.2$  and  $\tau/\tau_d = 1, 2, 4$  respectively

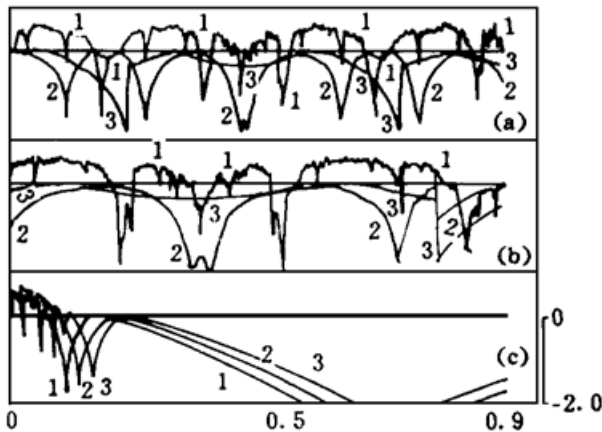


Fig. 5 Curves of MLE vs  $k, A, x_b/2\pi$ . where: (a) MLE vs.  $x_b/2\pi$ : for  $A = -0.5, \lambda = 0.8$ , and 1. uncontrolled case, 2.  $k = 0.1$ , 3.  $k = 0.2$ , (b) MLE vs.  $A$ : for  $x_b = \pi/5, \lambda = 0.8$ , and 1. uncontrolled case, 2.  $k = 0.1$ , 3.  $k = 0.2$ , (c) MLE vs.  $k$ : for  $x_b = \pi/5, A = -0.5$ , and 1.  $\lambda = 0.8$ , 2.  $\lambda = 0.9$ , 3.  $\lambda = 1.0$

若要把混沌控制在失稳的周期轨道上, 取  $\tau = 2\tau_d, \tau = 4\tau_d \dots$ , 作分叉图并把无控制及  $\tau = \tau_d$  情况以相同比例画在同一图中, 见图 4。可见,  $\tau = 2\tau_d$  和  $\tau = 4\tau_d$  确实分别使系统控制在失稳的周期 1 和 2 轨道上。控制的波形图见图 1(c, d) 段(图中只给出  $\tau = 2\tau_d$  的情况)。  $k$  变化的情况类似于前面  $\tau = \tau_d$  时的结果。

为从总体上分析系统的可控性, 由(5)式和(6)式作系统的最大李指数与  $k, A, x_b$  的关系曲线, 示于图 5, 可以看出控制系统的稳定区与三者都有关。在具体控制时根据系统初始参数及控制的目标状态周期  $\tau$  来选定合适的控制强度  $k$ , 一般  $k$  的选取以保证控制在不稳定周期轨道而又有较小的李指数为宜, 但也不能太大, 否则可能把系统状态推向其他吸引子而变成新的混沌状态。

控制加到  $x_b$  上的情况可作相似讨论, 也可得到

类似结果。

在作图 1 和图 2 时, 整个控制时间内对系统及控制量都加入了噪声, 其目的之一是可以迅速实现从不动点向周期态的转换控制(因而图中的暂态时间较短), 二是考察两种控制的抗噪声效果, 而且这也更接近实际系统。比较二者可以看到, 控制加于 A 的情况抗噪声效果好(二者的噪声幅度同为 5%)。如果不加噪声, 则波形和吸引子形状都较比规则。

### 3 实验结果

声光双稳系统混沌的实验控制装置如图 6 所示。He-Ne 激光输出稳定在 2 mW, 以布拉格角入射至调制晶体, 声光调制器由 100 MHz 线性调制的超声驱动源驱动, 光电二极管接收器把一级衍射光转变为电信号, 经放大及延时送入超声驱动源来控制声光调制器出射的衍射光强度, 由此构成一闭环系统。当放大器 5 的放大倍数较小时, 一级衍射光强保持稳定, 此时系统状态处于双稳的一支; 连续增大放大倍数, 系统产生自脉冲行为并由倍周期道路进入混沌。用 HP-54503A 数字存储示波器对波形及吸引子跟踪测量, 并用 Hitachi v-1065 进行稳定性观察, 混沌波形和吸引子如图 7 所示, 图中二条波形曲线上面的为变量曲线, 下面的是延时后的曲线, 用来画吸引子图(以下类同)。

控制时, 先把放大器 14 的倍数调到最小, 12 的倍数保证减法器的正负输入有相同的幅度, 然后接通开关 9, 改变放大器 14 的倍数来实现选择性控制。实验时, 延时线 6 为 50 m 同轴电缆, 11 分别用 50 m 和 100 m 同轴线。当采用 50 m 延时线、 $k$  值(相当于放大倍数)在 0.1 左右以下来控制时, 混沌波形及吸引子略有变化, 当  $k$  达 0.15 左右时, 控制状态稳定在周期轨道, 如图 8 所示。当  $k$  达到 0.3 左右, 控制达到不动点。增加  $k$  值超过 0.9, 系统状态被推入新的吸引子, 其形状不同于图 7 所示。

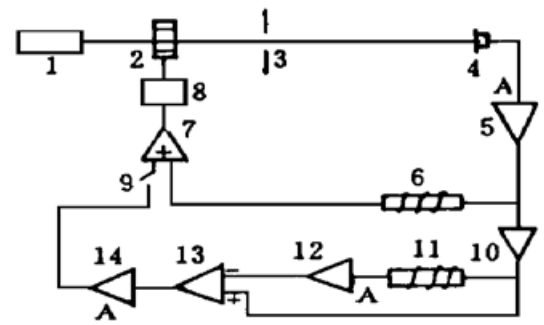


Fig. 6 Experimental setup. where: 1. He-Ne laser; 2. AOM modulator; 3. light diaphragm; 4. photodiode (as OE detector); 5, 12 and 14. electronic amplifier; 6 and 11. electronic delay line; 7. adder; 8. AOM driving source; 9. switching key; 10. isolator unit; 13. subtractor

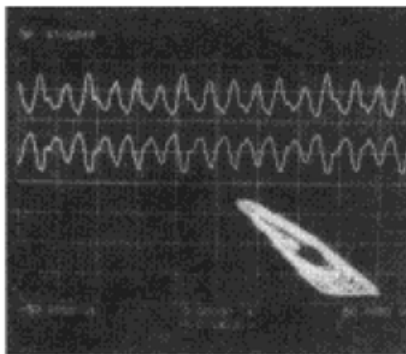


Fig. 7 Chaos waveform and attractor

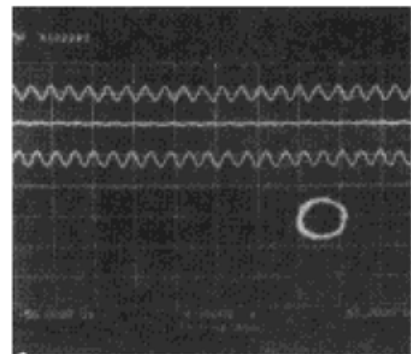


Fig. 8 Control diagram:  $k = 0.1$ ,  $\tau = \tau_d$

换用 100 m 延时线, 放大倍数  $k$  在 0.15 左右以下吸引子和波形略有变化;  $k$  达 0.43 时, 系统被稳定地控制在周期 1 状态, 见图 9, 其吸引子与无控制时进入混沌前的周期 1 自脉冲吸

引子形状相同,这就证实了控制系统拓扑结构不变,而图 8 所示周期态的拓扑性质显然已被改变。 $k$  减小到 0.32 左右及 0.24 左右时,出现了周期 2 和周期 4 控制状态,见图 10,严格讲它们并不是原系统的不稳定周期轨道,但从分叉图图 4 可以看出, $\tau = 2\tau_a$  控制时的周期 2 和周期 4 已经很接近原系统的不稳定周期轨道,并且由于各种噪声的影响,很难严格区分它们,此时控制系统的拓扑结构改变不大。 $k$  大于 0.43 的情况与  $\tau = \tau_a$  的类似。

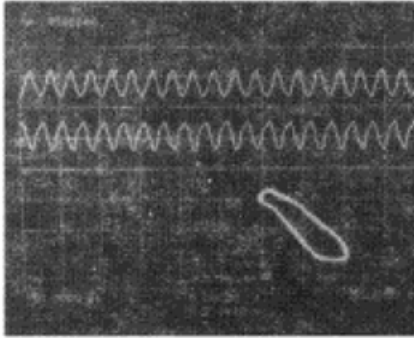


Fig. 9 Control diagram and periodic attractor:  $k = 0.43$ ,  $\tau = 2\tau_a$

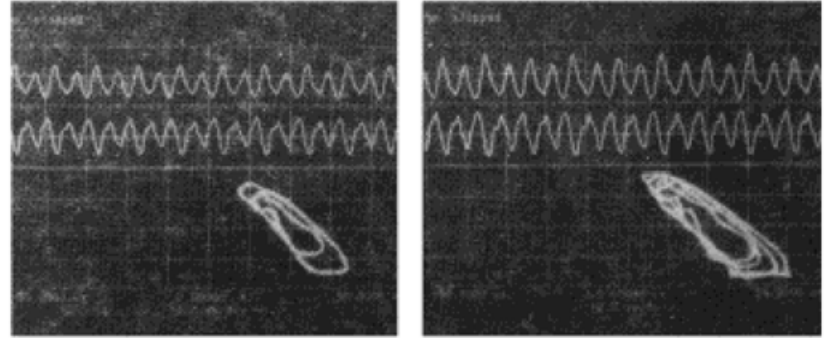


Fig. 10 Diagram of controlled waveform and attractor. where: (a)  $\tau = 2\tau_a$ ,  $k = 0.32$ , (b)  $\tau = 2\tau_a$ ,  $k = 0.24$

若想严格地把混沌控制在长周期不稳定轨道,可以增大  $\tau$  到相应值,但过长的延时会使信号的相关性减弱,加之噪声的干扰使得控制接近一种无规扰动而失去预期的效果。一般在实际中以较短延时来代替,适当的控制强度会使控制的状态很接近目标不稳定周期轨道,拓扑结构改变较小而且稳定。

## 4 结论与讨论

本文提出的控制方法体现了参数微扰法控制思想。当系统状态为混沌态时,控制量  $I_c$  也为混沌量,由于混沌的遍历性,系统可以找到以控制延时  $\tau$  为周期的轨道,而受控系统又具有负的李指数,因而可以稳定在这一轨道,此时  $I_c = 0$ ,系统回到原系统,控制得到了原系统的不稳定周期轨道。

对较小的  $k$ ,  $\tau$  周期轨道可能变成不稳定的,而  $\tau$  的倍周期轨道可能稳定,这相当于周期激励的控制方法(但原理不同),在一些情况下得到的周期轨道与原系统不稳定周期轨道很接近,可以代替长延时控制才能达到的控制目标状态。对实际的系统,这将是方便的。

在  $k$  变化的过程中,偶尔有控制到高阶模的时候,这可以通过改变  $k$  然后再重新调回而加以消除。在实验中,控制到某一状态后固定  $k$ ,一般会比较稳定。在计算机模拟控制中,发现  $\tau$  偏离目标控制状态的周期时,控制状态经常稳定在高阶模振荡,且其周期也与  $\tau$  及  $k$  有关,这在实验中得到了证实。关于这方面的进一步研究将另文讨论。

这种控制方法实现起来简单方便,效果比较稳定,可以把混沌系统选择性地控制在不同的周期状态,而且相互间的转换容易实现。

## 参 考 文 献

- [1] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(11) : 1196~ 1199
- [2] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, M. L. Spano, Experimental control of chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(26) : 3211~ 3214

- [ 3 ] J. Singer, Y-Z. Wang, H. H. Bau, Controlling a chaotic system. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**(9) : 1123 ~ 1125
- [ 4 ] A. Azevedo, S. M. Rezende, Controlling chaos in spin-wave instabilities. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**(10) : 1342~ 1345
- [ 5 ] E. R. Hunt, Stabilizing high-period orbits in a chaotic system: The diode resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**(15) : 1953~ 1955
- [ 6 ] U. Dressler, G. Nitsche, Controlling chaos using time delay coordinates. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**(1) : 1~ 4
- [ 7 ] D. Auerbach, C. Grebogi, E. Ott *et al.*, Controlling chaos in high dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **69**(24) : 3479~ 3482
- [ 8 ] N. J. Mehta, R. M. Henderson, Controlling chaos to generate aperiodic orbits. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(8) : 4861~ 4865
- [ 9 ] T. L. Carroll, I. Triandof, I. Schwartz *et al.*, Tracking unstable orbits in an experiment. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **46**(10) : 6189~ 6192
- [ 10 ] T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott *et al.*, Using chaos to target stationary states of flows. *Phys. Lett. (A)*, 1992, **69**(5) : 349~ 354
- [ 11 ] R. Lima, M. Pettini, Suppression of chaos by resonant parametric perturbations. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(2) : 726~ 733
- [ 12 ] Y. Braiman, I. Goldhirsch, Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**(20) : 2545~ 2548
- [ 13 ] B. A. Huberman, E. Lumer, Dynamics of adaptive system. *IEEE Tran. Circuits System*, 1990, **37**(4) : 547~ 549
- [ 14 ] S. Sinha, R. Ramaswamy, J. S. Rao, Adaptive control in nonlinear dynamics. *Phys. D*, 1990, **43**(1) : 118~ 128
- [ 15 ] R. Roy, T. W. Murphy Jr., T. D. Maier *et al.*, Dynamical control of chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**(9) : 1259~ 1262
- [ 16 ] K. Pyragas, Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. (A)*, 1992, **170**(6) : 421~ 428
- [ 17 ] R. Vallee, C. Delisle, J. Chrostowski, Noise versus chaos in acousto-optic bistability. *Phys. Rev. (A)*, 1984, **30**(1) : 336~ 342

## Chaos Control of Acousto-Optical Bistable System

Liu Jingang<sup>a,b</sup> Shen Ke<sup>b</sup> Zhou Liwei<sup>a</sup>

*a, Optical Engineering Department, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081*

*b, Physics Department, Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Changchun 130022*

(Received 2 January 1996; revised 15 March 1996)

**Abstract** This paper gives a method of chaos control to acousto-optical bistable (AOB) system using the technique of continuous parameter delayed feedback. Numerical results show that under some stiffness of control the controlled system has negative maximum Lyapunov exponent (MLE) in the initial chaotic domain and so that controlled state is convinced to be the unstable fixed point or unstable periodic orbit (UPO) of the initial system. By compared with the experimental results, the validity of this control method is verified.

**Key words** chaos control, OGY control method, UPO, feedback control, Lyapunov exponent, AOB system.