

一种改进的代数迭代重建技术 及其在三维温度场再现中的应用*

阎大鹏 刘 峰 王振东 贺安之 武丁二

(南京理工大学应用物理系, 南京 210094) (华北工学院理学系, 太原 030051)

摘 要 提出了一种改进的代数迭代重建技术, 通过计算机数值模拟, 考查了其重建精度与投影方向数、迭代次数的关系。结果表明, 这种技术与代数迭代法(ART)比较, 具有收敛速率快、重建精度高的优点。把这种技术应用于一个三维温度场的重建, 再现了其三维温度分布。

关键词 干涉层析, 重建, 三维温度场。

1 引 言

至目前为止, 三维折射率场的干涉层析技术主要还是集中在三维重建技术的研究上。已提出了许多不同的再现算法, 归结起来可分为两大类。一类是变换法, 如 Radon 变换^[1], Fourier 变换等^[2]; 另一类是级数展开法, 其中最具有代表性的代数迭代法(ART)^[3], 并已发展成多种形式, 如 ART3^[4]、SART4^[5]、AVART^[6]、MART^[7]和QMART^[8]等。ART 算法的主要优点是适用于“非完全数据”三维折射率场的再现, 且可以赋予初值为零。其缺点是收敛速度慢, 再现精度低。这里的“非完全数据”指的是待测三维折射率场中含有遮挡模型或投影方向数有限, 使投影数据丢失。其他形式的代数迭代算法如 MART 和 QMART, 尽管收敛速度比 ART 快, 但由于赋予初值的盲目性, 使再现精度的稳定性飘忽不定。本文在分析了各种 ART 算法的基础上, 针对 QMART 算法虽具有比 ART 高的再现精度, 但稳定性差问题, 提出了一种改进的代数迭代算法, 它克服了 ART 算法收敛速度慢、再现精度低的缺点, 又克服了 MART 算法赋予初值的盲目性。通过的计算机的数值模拟结果表明, 不管是再现精度还是收敛速度均比 ART 算法好。作者利用该算法, 对一个由电热丝产生的三峰温度场进行重建, 获得了其三维温度分布。

2 重建算法及数值模拟

在干涉层析中, 如果待测三维折射率场的多方向干涉图上的条纹位移量是 $m(P, \theta)$, 如图 1 所示, 其中 θ 角决定了观察方向, P 确定了观察方向的探测光线的位置, $m(P, \theta)$ 是待测三维折射率场变化 $\Delta n(r, \psi) = n(r, \psi) - n_0$ 。沿直线 $p = r \sin(\psi - \theta)$ 的积分, 则干涉方程为

* 国家自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1995年7月18日; 收到修改稿日期: 1995年9月25日

$$\begin{aligned}
 m(P, \theta) &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [n(r, \psi) - n_0] \delta[p - r \sin(\psi - \theta)] dx dy \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta n(x, y) ds
 \end{aligned} \tag{1}$$

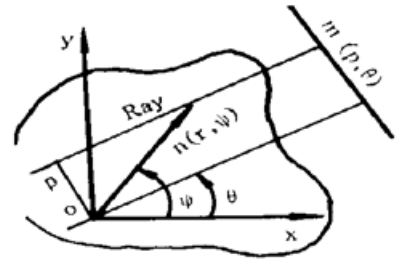


Fig. 1 Three-dimensional refractive index field and its projection

式中 λ 为波长, δ 为狄拉克函数, $p = -x \sin \theta + y \cos \theta$, $s = x \cos \theta + y \sin \theta$.

采用网络法, 设与 z 轴相垂直平面内的折射率场分布为 $n(x, y)$, 在该平面内有一条透射光线, 把折射率场所占的截面区域分成足够小的矩形网格, 在该矩形网格内的折射率变化 Δn 为常数, 则(1)式可以改写成

$$\sum_{j=1}^K A_{ij} \Delta n_j = \lambda m_i = M_i \tag{2}$$

为了书写方便, 令 $\Delta n_j = n_j$, 则有

$$\sum_{j=1}^K A_{ij} n_j = M_i \tag{3}$$

求解(3)式的具体步骤如下:

- 1) 初始估计值为零, 即 $n_1^{(0)}, n_2^{(0)}, \dots, n_k^{(0)}$ 皆为零;
- 2) $\mathbf{n}^{(1)} = \lambda \frac{M_1}{A_{1j}}$, $\mathbf{n}^{(1)} = (n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_k^{(1)})$, $\mathbf{A}_{1j} = (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1k})^T$, $A_{1j} \neq 0$;
- 3) $M_i^{(N)} = \sum_{j=1}^K A_{ij} n_j^{(N)}$;
- 4) $\mathbf{n}_j^{(N+1)} = \mathbf{n}_j^{(N)} (1 + \alpha^{(N)} A_{ij})$, $j = 1, 2, \dots, K$;

其中

$$\mathbf{n}_j^{(N+1)} = (n_1^{(N+1)}, n_2^{(N+1)}, \dots, n_k^{(N+1)}), \quad \alpha^{(N)} = \beta_i^{(N)} \frac{M_i - M_i^{(N)}}{\sum_{j=1}^K A_{ij}^2 n_j^{(N)}},$$

$\beta_i^{(N)}$ 为松弛算子。

为了考查该算法的重建精度和收敛速度, 进行了数值模拟并与 ART 算法进行比较。所选择的模拟函数为

$$n(x, y) = \exp\{-12[(x - 0.5)^2 + y^2]\} + \exp\{-12[(x + 0.5)^2 + y^2]\} \tag{4}$$

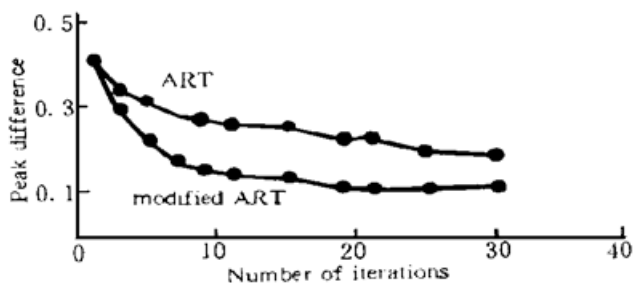


Fig. 2 Relationship between peak value difference and iterations

重建区域为 $x \in [0, 2], y \in [0, 2]$, 投影方向数取 8 个, 即 $10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$, 场空间采样间隔为 Δx 和 Δy , 各方向的采样数为 40 个, 松弛系数为 0.8, 模拟函数的峰值为 0.9868。得到迭代次数与峰值的关系如表 I 所示。峰值差与迭代次数的关系如图 2 所示。上述结果表明, 改进的 ART 比 ART 具有更高的重建精度和较快的收敛速度。

进一步考查重建误差与投影方向数的关系, 在迭代次数为 11 次的情况下, 选择角间隔为 10° , 并定义最大误差为

Table 1. Relationship between peak value & iterations

iteration \ algorithms	1	3	5	7	9	11	15	19	21	25	30
ART	0.57	0.64	0.67	0.71	0.72	0.73	0.74	0.76	0.77	0.77	0.77
modified ART	0.57	0.69	0.76	0.82	0.84	0.84	0.85	0.88	0.89	0.89	0.89

$$E_{\max} = \text{Max} \left| \frac{n_j^{(N)} - n_j}{n_j} \right| \tag{5}$$

平均误差为

$$E_{av} = \frac{\sum_{j=1}^K |n_j^{(N)} - n_j|}{\sum_{j=1}^K K \times n_j} \tag{6}$$

得到的最大误差、平均误差与投影方向数的关系如图 3 所示。可见，改进的代数迭代算法在 6 个投影方向数时所达到的重建精度比 ART 算法在 10 个投影方向数时的精度还要高。

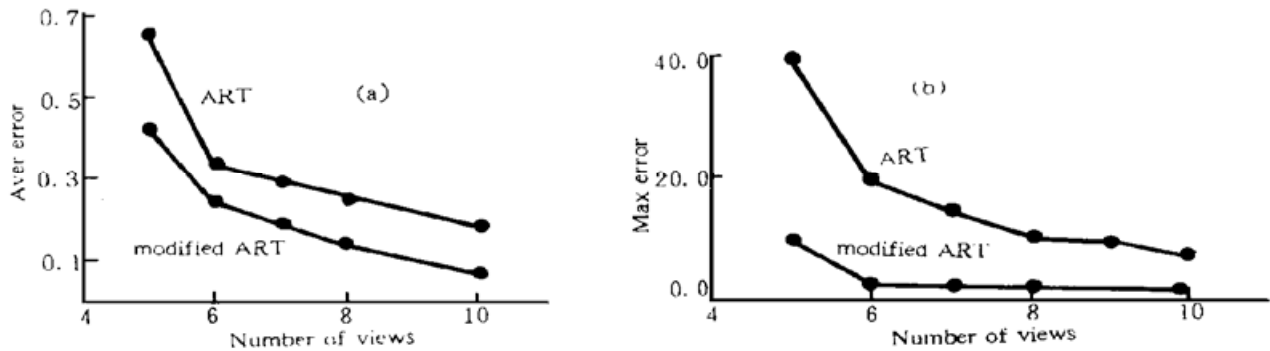


Fig. 3 Relationship between errors and views

(a) Average errors and views, (b) Maxium errors and views

为了进一步考查该算法对任意三维折射率场的适用性，通过数值模拟，用该算法重建了一个四峰型函数。模拟折射率场函数为重建区域为 $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ ，取投影方向数为 6 个，即 $\theta = 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ, + 80^\circ$ ，每个投影方向 16 个采样数据，在 8 次的迭代情况下，得到的重建结果如图 4 所示，其中图 4(b) 为原函数。经计算在上述条件下的重建误差为，最大误差 8.45%，平均误差 2.24%。结果表明，改进的代数迭代算法能够用于四峰型折射率场的再现。同样地，可用于其他三维折射率的再现。

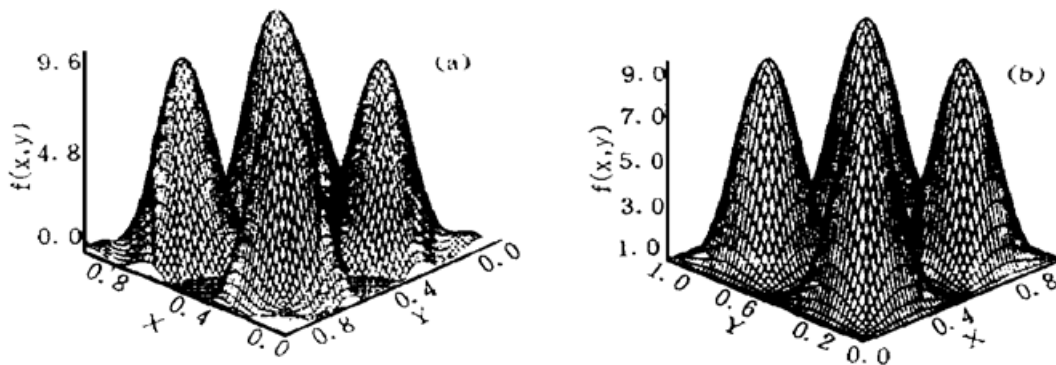


Fig. 4 Reconstructed result of Four peak simulative functions

(a) 8 iteration results, (b) Diagram of original function

3 应 用

把上述改进的代数迭代技术应用于一个三峰型温度场的重建,并再现了其三维温度分布。

三峰型温度场是由三个电热丝通电加热产生的。三个电热丝分别位于一个等边三角形的顶角,相距为 1.3 cm。该温度场是一个具有平面对称性的稳定场,根据上面的计算机数值模拟结果,重建这样一个三维温度场,只需要四个投影方向数就足够了。利用四通道法布里-珀罗干涉系统^[9],获得四个方向的温度场无限宽条纹干涉图如图 5 所示。这些干涉图分别由 4

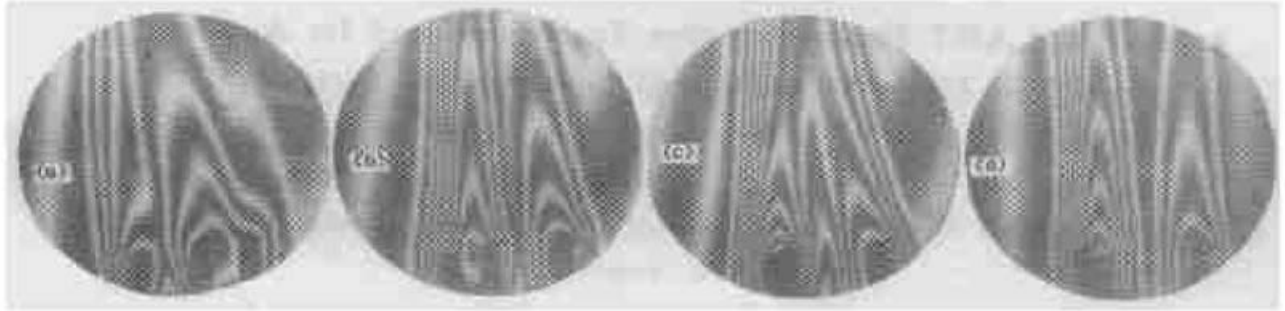


Fig. 5 Multidirectional interferograms of three peak temperature field (a) $\theta = 0^\circ$; (b) $\theta = 30^\circ$; (c) $\theta = 60^\circ$; (d) $\theta = 90^\circ$

个 CCD 摄像机输入到 PC-VISION 100 图像处理机中,经过干涉条纹的细化和条纹数的判读^[10],由改进的代数迭代算法计算出三峰温度场的三维折射率分布,然后由 G-D 公式和理想气体状态方程^[11]转换成温度,图 6 给出了该三峰型温度场在 $z = 5 \text{ mm}$ 截面的温度分布值。其中重建区域为 $[-1.2, 1.2]$,迭代次数为 10 次,在 80486 计算机上每选一次需 5 s。图 6 不是以三峰热源成均匀分布,这是由于环境扰动所引起的。



Fig. 6 Temperature distribution on the section of $z = 5 \text{ mm}$

结 论 由 QMART 重建技术而改进的新算法具有收

敛速度快,重建精度高,重建精度稳定性好的优点。实验结果表明,这种技术能够用于三维折射率场的重建。该算法在三维流场层析中的应用正在进一步深入研究之中。

参 考 文 献

- [1] 高益庆, 用 Radon 变换法重建含有遮挡物的三维折射率场. *中国激光*, 1995, **22**(1): 49~ 54
- [2] Lambertus Hesselink, Digital image processing in flow visualization. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1988, **20** (1): 421~ 485
- [3] Steve Doerr, Application of holographic interferometry to a three-dimensional flow field. *Proc. SPIE*, 1991, **1554B**: 544~ 555
- [4] G. T. Herman, A relaxation method for reconstructing objects from noisy x-rays. *Math. Program*, 1975, **8**(1): 1~ 19
- [5] A. H. Anderson, A. C. Kak, Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm. *Ultrason. Imaging*, 1984, **6**(1): 81~ 94
- [6] C. S. Iler, R. Wenskus, P. Middendorf *et al.*, Interferometric tomography for flow visualization of den-

- sity field in supersonic jets and convective flow. *Appl. Opt.*, 1994, **30**(14): 2921~ 2932
- [7] Dean Verhoeven, Limited-data computed tomography algorithms for the physical sciences. *Appl. Opt.*, 1994, **32**(16): 3736~ 3754
- [8] Nicolas J. Dasauscy, Somw new multiplicative algorithms for image reconstruction from projections. *Liner Algebra and Its Application*, 1990, **130**: 111~ 132
- [9] 贺安之, 闫大鹏, 三维温度场的激光全息与干涉层析. *光学学报*, 1988, **8**(6): 543~ 549
- [10] 闫大鹏, 朱兆清, 鲁江陵等, 含冲击波流场干涉图的图像处理方法研究. *光学学报*, 1993, **13**(5): 439~ 443
- [11] 贺安之, 闫大鹏著, 激光瞬态干涉度量学. 北京, 机械工业出版社, 1993, 302~ 305

A Modified ART Reconstructive Technique and Its Application to Three-Dimensional Temperature Field

Yan Dapeng Liu Feng Wang Zhengdong He Anzhi

Department of Applied Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 20094)

Wu Dinger

(Department of Physics, North China Institute of Technology, Taiyuan 030051)

(Received 18 July 1995; revised 25 September 1995)

Abstract A modified algebraic reconstructive technique ART is presented. By the computer simulation, relationship between reconstructive precision and views and relationship between reconstructive accuracy and iterations are tested. The results show that this technique has the merits of quick convergence and high reconstructive precision as compared with ART. Using this technique to the tomography of a three-peak temperature field, the three-dimensional temperature distribution is reconstructed.

Key words interferometric tomography, reconstruction, three-dimensional temperature field.