第 16 卷　第 9 期　　光　学　学　报　　Vol. 16, No. 9
1996 年 9 月　　ACTA OPTICA SINICA　　September, 1996

两个原子与双模腔场的多光子相互作用: 场和原子的动力学性质

张智明
(西安交通大学理学院光子学研究所, 西安 710049)
何林生
(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

摘　要　研究一对偶极相互作用原子与双模量子腔场的多光子相互作用, 分析场和原子的动力学性质, 给出腔模平均光子数和原子反转度时间演化的解析表达式, 考察腔模初态、初场强度以及原子间偶极-偶极相互作用的影响。

关键词　双原子,　双模场,　多光子相互作用。

1　引　　言

J-C 模型[1]是量子光学中的一个基本模型。通过对这个模型的研究, 发现了场和原子的许多非经典性质, 如光场压缩态[2]、光子的反聚束效应和亚泊松分布[3, 4]、原子发射谱的拉比分裂[5~7]、以及在原子和场的量子统计平均值的时间演化中出现的“崩塌与复苏”(“c-r”)现象[8~10]。一些作者把 J-C 模型推广到单原子与双模场的相互作用[11~14]。文献[15]研究了双原子与双模场的相互作用, 将其采用的哈密顿量对角化并计算了有关跃迁几率, 但没有计及原子间直接的偶极-偶极相互作用。本文研究一对具有偶极相互作用的原子与双模量子腔场的多光子相互作用, 考察场模初态、原子间偶极-偶极相互作用以及场模强度对腔场和原子动力学性质的影响。

2　系统哈密顿量本征方程求解

考虑两原子与双模场的多光子相互作用, 假设原子间距小于腔场波长, 使得原子间的偶极-偶极相互作用不可忽略, 而两原子与腔模具有相同的耦合, 则系统的哈密顿量为(取 $\hbar = 1$)

$$\left.\begin{aligned} &H = H_0 + H_1 + H_2, \qquad H_0 = \omega_1 a_1^{+} a_1 + \omega_2 a_2^{+} a_2 + \frac{1}{2}\omega_A \sum_{i=1}^{2} \sigma_{z,i} \\ &H_1 = g \sum_{i=1}^{2} (\sigma_i^{+} a_1^{M_1} a_2^{M_2} + a_1^{+M_1} a_2^{+M_2} \sigma_i), \qquad H_0 = g_A(\sigma_1^{+}\sigma_2 + \sigma_2^{+}\sigma_1) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 H_0 为腔场和原子的自由哈密顿量, H_1 表示原子与腔模的相互作用, H_2 表示两原子间的偶极 - 偶极相互作用, 其它符号的意义是众所周知的。为了简化计算, 考虑多光子共振作用, 即 $\omega_A = M_1\omega_1 + M_2\omega_2$。

收稿日期: 1995 年 6 月 3 日; 收到修改稿日期: 1995 年 10 月 16 日

H 的本征方程为

$$H\left|\Psi_i^n\right\rangle = E_i^n\left|\Psi_i^n\right\rangle \tag{2}$$

其中上标 n 代表$\{n_1, n_2\}$, n_i 为腔模 i 的光子数。在求解(2) 式时, 考虑到两个原子是全同的, 用 H_0 的三个对两原子交换为对称的本征矢$\left|\Phi_j\right\rangle$将$\left|\Psi_i^n\right\rangle$展开, 即

$$\left|\Psi_i^n\right\rangle = \sum_{j=1}^{3} C_{ij}^n\left|\Phi_j\right\rangle \tag{3}$$

H_0 的本征值和三个对称的本征矢分别为

$$E_0^n = \omega_1(n_1 + M_1) + \omega_2(n_2 + M_2) \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left|\Phi_1\right\rangle = \left| +, +; n_1, n_2\right\rangle, \qquad \left|\Phi_3\right\rangle = \left| -, -; n_1 + 2M_1, n_2 + 2M_2\right\rangle\\ &\left|\Phi_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left| +, -; n_1 + M_1, n_2 + M_2\right\rangle + \left| -, +; n_1 + M_1, n_2 + M_2\right\rangle\right)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由(1)～(5)式可求得

$$E_i^n = E_0^n + \sqrt{2}\,g\lambda_i^n \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}&C_{11}^n = \frac{\eta_n}{\Lambda_1^n}, \qquad C_{12}^n = 0, \qquad C_{13}^n = -\frac{\gamma_n}{\Lambda_1^n}\\ &C_{k1}^n = \frac{\gamma_n}{\Lambda_k^n}, \qquad C_{k2}^n = \frac{\lambda_k^n}{\Lambda_k^n}, \qquad C_{k3}^n = \frac{\eta_n}{\Lambda_k^n} \qquad (k = 2, 3)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_2^n = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\alpha^2 + 4(\gamma_n^2 + \eta_n^2)} + \alpha\right]\\ &\lambda_3^n = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{\alpha^2 + 4(\gamma_n^2 + \eta_n^2)} - \alpha\right]\\ &\lambda_1^n = 0, \qquad \alpha = \frac{g_A}{\sqrt{2}\,g}\\ &\gamma_n = \sqrt{\frac{(n_1 + M_1)!}{n_1!}\frac{(n_2 + M_2)!}{n_2!}}, \qquad \eta_n = \sqrt{\frac{(n_1 + 2M_1)!}{(n_1 + M_1)!}\frac{(n_2 + 2M_2)!}{(n_2 + M_2)!}}\\ &\Lambda_1^n = \sqrt{\gamma_n^2 + \eta_n^2}, \qquad \Lambda_k^n = \sqrt{(\Lambda_1^n)^2 + (\lambda_k^n)^2} \quad (k = 2, 3)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

下两节分别讨论腔场和原子的动力学性质。

3　腔模平均光子数的时间演化

通过分析模 1 平均光子数的时间演化来讨论腔场的动力学性质。模 1 平均光子数的量子力学期待值为

$$\langle n_1(t)\rangle = \langle\Psi(0)\left|\exp(iHt)\, a_1^{\dagger} a_1 \exp(-iHt)\right|\Psi(0)\rangle \tag{9}$$

其中$\left|\Psi(0)\right\rangle$是系统的初态。假设初始两原子均处于$\left| +\right\rangle$态, 两腔模分别处于Fock 态$\left|n_1\right\rangle$和$\left|n_2\right\rangle$, 即$\left|\Psi(0)\right\rangle = \left|\Phi_1\right\rangle$, 可以求得

$$\langle n_1(T)\rangle_n = \sum_{k=1}^{3} A_{kk}^n + 2\left[A_{12}^n\cos\lambda_2^n T + A_{13}^n\cos\lambda_3^n T + A_{23}^n\cos(\lambda_2^n - \lambda_3^n)T\right] \tag{10}$$

其中下标 n 表示初场处于 Fock 态, $T = \sqrt{2}\,gt$,

$$\left.\begin{aligned}&A_{12}^{n}=-M_{1}\left(\frac{\gamma_{n}\eta_{n}}{\Lambda_{1}^{n}\Lambda_{2}^{n}}\right)^{2},\qquad A_{13}^{n}=-M_{1}\left(\frac{\gamma_{n}\eta_{n}}{\Lambda_{1}^{n}\Lambda_{3}^{n}}\right)^{2},\qquad A_{23}^{n}=M_{1}(\eta_{n}^{2}-\gamma_{n}^{2})\left(\frac{\gamma_{n}}{\Lambda_{2}^{n}\Lambda_{3}^{n}}\right)^{2},\\&\sum_{k=1}^{3}A_{kk}^{n}=\left(\frac{\eta_{n}}{\Lambda_{1}^{n}}\right)^{2}\left[n_{1}+2M_{1}\left(\frac{\gamma_{n}}{\Lambda_{1}^{n}}\right)^{2}\right]+\left(\frac{\gamma_{n}}{\Lambda_{2}^{n}}\right)^{2}\left[n_{1}+M_{1}\left(\frac{\lambda_{2}^{n}}{\Lambda_{2}^{n}}\right)^{2}+2M_{1}\left(\frac{\eta_{n}}{\Lambda_{2}^{n}}\right)^{2}\right]\\&\qquad+\left(\frac{\gamma_{n}}{\Lambda_{3}^{n}}\right)^{2}\left[n_{1}+M_{1}\left(\frac{\lambda_{3}^{n}}{\Lambda_{3}^{n}}\right)^{2}+2M_{1}\left(\frac{\eta_{n}}{\Lambda_{3}^{n}}\right)^{2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

由(10)式可以看到，$\langle n_1(T)\rangle_n$ 含有一个常数项和三个简谐振荡项。分析(8)式和(11)式可知这三个振荡项的频率和振幅分别满足下列关系：

$$(\lambda_2^n-\lambda_3^n)>\lambda_2^n>|\lambda_3^n| \tag{12}$$

$$A_{23}^n<|A_{12}^n|<|A_{13}^n| \tag{13}$$

即振荡频率越高的项振幅越小。

在一般情况下，初始两模可能处于 Fock 态的某种叠加态(如：相干态、压缩态等)，则应用下式代替(10)式：

$$\langle n_1(T)\rangle=\sum_{n_1}P_{n_1}\sum_{n_2}P_{n_2}\langle n_1(T)\rangle_n \tag{14}$$

其中 P_{n_i} 是模 i 的初始光子数分布。为了进一步讨论，先分析单原子情况的有关结果。

在单原子情况，假设初始原子处于$|+\rangle$态，两场模分别处于 Fock 态$|n_1\rangle$和$|n_2\rangle$，可以求得

$$\langle n_1(T)\rangle_n=\left(n_1+\frac{1}{2}M_1\right)-\frac{1}{2}M_1\cos\sqrt{2}\,\gamma_nT \tag{15}$$

可以看到 $\langle n_1(T)\rangle_n$ 中含有一个常数项和一个简谐振荡项。$\langle n_1(T)\rangle_n$ 的变化范围为$[n_1, n_1+M_1]$。

当初始模 1 处于 Fock 态，模 2 处于 Fock 态的叠加态时有

$$\langle n_1(T)\rangle=\left(n_1+\frac{1}{2}M_1\right)-\frac{1}{2}M_1\sum_{n_2}P_{n_2}\cos\sqrt{2}\,\gamma_nT \tag{16}$$

与通常的 J-C 模型比较可知，由于(16)式中含有一个振荡因子，则对 n_2 的求和将使$\langle n_1(T)\rangle$呈现一套"崩塌与复苏"。

在一般情况下，当初始两模均处于 Fock 态的叠加态时有

$$\langle n_1(T)\rangle=\left(\bar{n}_1+\frac{1}{2}M_1\right)-\frac{1}{2}M_1\sum_{n_1}P_{n_1}\sum_{n_2}P_{n_2}\cos\sqrt{2}\,\gamma_nT \tag{17}$$

其中 $\bar{n}_1$ 是模 1 的初始平均光子数。在这种情况下，$\langle n_1(T)\rangle$将是 N_1 套(N_1 为 n_1 的个数)"崩塌与复苏"的叠加。

根据上面对单原子情况的分析，对两原子情况可得到下述结论；由于 $\langle n_1(T)\rangle_n$ 中含有三个振荡项，当初始模 1 处于 Fock 态而模 2 处于 Fock 态的叠加态时，$\langle n_1(T)\rangle$将是三套"崩塌与复苏"的叠加；当初始两模均处于 Fock 态的叠加态时，$\langle n_1(T)\rangle$将是 $3N_1$ 套"崩塌与复苏"的叠加。

下面考虑(10)式的几种近似，分析原子间偶极-偶极相互作用及场模强度的影响。

1) 当 $\alpha=0$ 时有

$$\langle n_1(T)\rangle_n=\sum_{k=1}^{3}A_{kk}^n+2(2A_{12}^n\cos\lambda_2^nT+A_{23}^n\cos 2\lambda_2^nT) \tag{18}$$

可见，如果原子间偶极-偶极相互作用可忽略，则 $\langle n_1(T)\rangle_n$ 将只含两个振荡项，一项为基频，另一项为倍频，且倍频项的振幅小于基频项的振幅。

2) 当 $\alpha=0$，且 $n_1\gg M_1$，$n_2\gg M_2$(强场)时有

$$\langle n_1(T)\rangle_n = (n_1 + M_1) - M_1 \cos \sqrt{2}\, \gamma_n T \qquad (19)$$

比较(19)式与(15)式可见，二者的差别仅在于(15)式中的$M_1/2$在(19)式中被M_1代替。这表明，如果原子间偶极-偶极相互作用可忽略、且场较强时，两原子将独立地与腔场相互作用，$\langle n_1(T)\rangle_n$将只有一个振荡项，其变化范围为$[n_1,\ n_1 + 2M_1]$。

4　原子反转度的时间演化

在两原子情况，由于两原子是全同的，通过分析平均反转度$D_z = \frac{1}{2}(\sigma_{z,1} + \sigma_{z,2})$的时间演化讨论原子的动力学性质。假设系统的初态仍为$|\Psi(0)\rangle = |\Phi\rangle$，可以求得

$$\langle D_z(T)\rangle_n = \sum_{k=1}^{3} B_{kk}^n + 2[B_{12}^n \cos \lambda_2^n T + B_{13}^n \cos \lambda_3^n T + B_{23}^n \cos(\lambda_2^n - \lambda_3^n) T] \qquad (20)$$

其中$B_{jk}^n = c_{j1}^n c_{k1}^n (c_{j1}^n c_{k1}^n - c_{j3}^n c_{k3}^n)$。

可以看出，(20)式与(10)式的形式相同，同此可作类似讨论，这里不再赘述。

结　论　研究了一对具有偶极相互作用的原子与双模量子腔场的多光子作用，给出了腔场平均光子数和原子反转度时间演化的解析表达式，发现腔模初态、原子间偶极-偶极相互作用和场模强度对腔场和原子的动力学性质有重要影响。

感谢范洪义教授提供有关论文复印件。

参　考　文　献

[1] B. W. Shore, P. L. Knight, The Jaynes-Communings model. *J. Mod. Opt.*, 1993, **40**(7): 1195~1238

[2] R. Loudon, P. L. Knight, Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6/7): 709~759

[3] G. R. Short, L. Mandel, Observation of sub-poisson photon statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, **51**(5): 384~387

[4] L. Z. Wang, S. Y. Zhu, J. Bergou, Generation of sub-poisson photon statistics in a two-level atomic oscillator. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **43**(5): 2436~2445

[5] J. J. Sanchez-Mondragon, N. B. Narozhny, J. H. Eberly, Theory of spontaneous emission lineshape in an ideal cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, **51**(7): 550~553

[6] G. S. Agarwal, Vacuum-field Rabi oscillation of atoms in a cavity. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1985, **2**(3): 480~485

[7] J. Gea-Bancloche, R. R. Schlicher, M. S. Zubairy, Emission spectra of an atom in a cavity in the presence of a squeezed vacuum. *Phys. Rev. (A)*, 1988, **38**(7): 3514~3521

[8] J. H. Eberly, N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quatum model. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**(20): 1323~1326

[9] N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, J. H. Eberly, Coherence versus incoherence: collapse and revival in a simple quantum model. *Phys. Rev. (A)*, 1981, **23**(1): 236~247

[10] P. L. Knight, P. M. Reamore, Quantum origin of dephasing and revivals in the coherent state Jaynes-Commuings model. *Phys. Rev. (A)*, 1982, **26**(1): 676~679

[11] S. C. Gou, Quantum behavoir of a two-level atom interacting with two modes of light in a cavity. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **40**(9): 5116~5128

[12] A. S. Parkins, Resonannce fluorescence of a two-level atom in a two modes squeezed vacuum. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(11): 6873~6883

[13] A. Joshi, R. R. Puri, Characteristics of Rabi oscillations in the two-mode squeezed state of the field. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(7): 4336~4342

[14] A. M. Abdel-Hafez, Degenerate and nondegenerate two-mode normal squeezing in a two-level atom

and two-mode system. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(9): 6610~6614
[15] Fan Hong-yi, A generalized Jaynes-Cummings model for two collectively radiating atoms. *Commun. Theor. Phys.*, 1989, **11**: 509~513

Multiphoton Interaction of Two Atoms with a Two-Mode Quantum Cavity Field: Field and Atomic Dynamics

Zhang Zhiming
(*Institute of Photonics, School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)
He Linsheng
Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)
(Received 3 June 1995; revised 16 October 1995)

Abstract We study the multiphoton interaction of two atoms with two modes of a quantum cavity field. The field and atomic dynamics were analysed. The analytical expressions for the time evolutions of the mean photon number and of the atomic inversion were presented. The effects of the initial field states, the initial field intensities, and the dipole-dipole coupling of atoms were examined.
Key words two-mode field, two atoms, multiphoton interaction.