

非傍轴光束的光束质量因子. I. 定义*

曹 清 邓锡铭 郭 弘

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 高功率激光物理国家实验室, 上海 201800)

摘 要 在考虑了时间平均能流密度的矢量特性的情况下, 用修正后的光强公式重新给出了非傍轴标量光场光强二阶矩的表达式。在此基础上, 在忽略了瞬逝波的近似下证明了: 对于在自由空间稳态传输的单色标量光场来说, 其横截面上的光强二阶矩随轴坐标 z 的变化成抛物线性变化。并进一步把傍轴光束的 M^2 因子概念拓展到了非傍轴的标量光束。此外, 还对一些相关的问题进行了讨论。

关键词 光束质量因子, 非傍轴光束, 光强二阶矩。

1 引 言

自激光发明以来, 对激光束传输规律和光束质量的研究就一直是激光科学中一个很活跃的领域, 并一直都在对激光科学和技术的发展起着十分重要的作用^[1~3]。近年来, Siegman 提出的二阶矩理论则使得这一领域的研究又进入了一个新的阶段^[4~8]。二阶矩理论不仅把传统的 ABCD 定理推广到了任意的傍轴标量光束, 而且还建议了一个可以表征激光束光束质量的 M^2 因子, 从而为合理地比较不同激光系统的光束质量提供了一个统一的标准。但是, 由于二阶矩方法是建立在傍轴标量场理论基础上的, 因而它一般只能适用于傍轴标量光束, 而不能适用于非傍轴光束^[4, 8~9]。

最近, 文献[9, 10]作了把二阶矩方法推广到非傍轴标量光束的尝试, 并得到了一些有意义的结果。然而, 正如在文献[11]中所指出的那样, 从麦克斯韦的电磁场理论来看, 传统的标量场理论没有考虑到能流密度的矢量特性, 而是直接地把振幅的平方解释为光强, 这样的光强定义具有很大的局限性, 它一般只适用于傍轴标量光束, 而不能适用于非傍轴光束。由于文献[9, 10]是在传统的标量场框架内讨论问题, 采用了传统标量场中的光强表达式, 因而其所得的结果也只能适用于傍轴标量光束。由此可见, 文献[9, 10]并没有真正地把二阶矩方法推广到非傍轴标量光束。若要把二阶矩方法真正地推广到非傍轴标量光束, 则还需进行进一步的研究。

本文将利用文献[11]所给出的精确的光强公式, 进一步把 Siegman 的二阶矩方法推广到非傍轴的标量光束, 并对一些有关的问题进行讨论。

* 国家高技术 863-416 资助课题。

收稿日期: 1995 年 10 月 6 日; 收到修改稿日期: 1996 年 1 月 4 日

2 非傍轴标量光束的 M^2 因子

众所周知,真空中的单色标量光场满足稳态亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (1)$$

式中的 ϕ 为复振幅光场分布函数。它的解一般可表示为以下的形式

$$\phi = \Phi \exp(ikL) \quad (2)$$

式中 Φ 为振幅, L 为准程函(为了与几何光学中的程函概念想区别), 它们都是空间坐标(x, y, z) 的实函数。文献[11]已经证明,对于标量场,在考虑了时间平均能流密度的矢量特性的情况下,横截面上的光强值就不仅与振幅的平方有关,而且与准程函梯度的 z 分量有关,即

$$I = \frac{c}{4\pi} \Phi^2 \frac{\partial L}{\partial z} \quad (3)$$

式中 I 为垂直于 z 轴的横截面上的光强值。由于人们关心横截面上光强分布的相对值,而不是绝对值,所以本文将忽略掉(3)式中的常数因子,而直接地把 I 取作

$$I = \Phi^2 \frac{\partial L}{\partial z} \quad (4)$$

为了以下的分析方便,首先假定所有横截面上所流过的能量都已满足归一化条件,即

$$\iint_{\infty} I dx dy = \iint_{\infty} \Phi^2 \frac{\partial L}{\partial z} dx dy = 1 \quad (5)$$

式中的积分可对垂直于 z 轴的任一横截面进行。显然,(5)式这个假定能够成立的条件是:所有横截面上所流过的总能量都相同,都与轴坐标 z 无关,即

$$\iint_{\infty} I dx dy = C \quad (6)$$

本文在亥姆霍兹波动方程的基础上直接地证明这个条件。把(2)式代入(1)式,可得^[12]

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla L) = 2\Phi (\nabla \Phi) \cdot (\nabla L) + \Phi \nabla^2 L = 0 \quad (7)$$

综合利用(7)式、分步积分以及远场边界条件,可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \iint_{\infty} I dx dy &= \iint_{\infty} (2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial z} + \Phi \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}) dx dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\int_{-\infty}^{\infty} (2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial x} + \Phi \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}) dx \right] \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} (2\Phi (\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial y} + \Phi \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}) dy \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

这样就直接地证明(6)式的结论。把常数 $1/C$ 取作 I 的归一化系数,即可得到(5)式。由于 I 已经满足归一化条件,故可直接地把光强一阶矩和二阶矩表示为

$$\bar{x} = \iint_{\infty} x I dx dy = \iint_{\infty} x \Phi^2 \frac{\partial L}{\partial z} dx dy, \quad \bar{y} = \iint_{\infty} y I dx dy = \iint_{\infty} y \Phi^2 \frac{\partial L}{\partial z} dx dy \quad (9)$$

$$\overline{x^2} = \iint_{\infty} x^2 I dx dy = \iint_{\infty} x^2 \Phi^2 \frac{\partial L}{\partial z} dx dy, \quad \overline{y^2} = \iint_{\infty} y^2 I dx dy = \iint_{\infty} y^2 \Phi^2 \frac{\partial L}{\partial z} dx dy \quad (10)$$

强度一阶矩 \bar{x} 和 \bar{y} 表示光束“重心”的位置。把 \bar{x} 对 z 取一阶微分, 并利用(7)式和远场边界条件, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dz} &= \iint_{\infty} x \left(2\Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial z} + \Phi_0 \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right) dx dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \left(2\Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial z} + \Phi_0 \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right) dx \right] \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} x dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(2\Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial y} + \Phi_0 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) dy \right] \\ &= \frac{-i}{k} \iint_{\infty} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx dy \end{aligned} \quad (11)$$

在傅里叶分析中, 有一个重要的帕塞伐定理, 它的具体形式为

$$\iint_{\infty} g^*(x, y) h(x, y) dx dy = \iint_{\infty} G^*(f_x, f_y) H(f_x, f_y) df_x df_y \quad (12)$$

其中 $G(f_x, f_y)$ 、 $H(f_x, f_y)$ 分别是 $g(x, y)$ 、 $h(x, y)$ 的傅里叶变换式, 即

$$G(f_x, f_y) = \iint_{\infty} g(x, y) \exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy \quad (13)$$

$$H(f_x, f_y) = \iint_{\infty} h(x, y) \exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy \quad (14)$$

利用这个帕塞伐定理和微分运算的傅里叶变换性质, 并令

$$g(x, y) = \Phi(x, y), \quad h(x, y) = \partial \Phi(x, y) / \partial z \quad (15)$$

则可将(11)式变换为

$$\frac{d\bar{x}}{dz} = \lambda \iint_{\infty} f_x |\Psi(f_x, f_y)|^2 df_x df_y = \lambda \bar{f}_x \quad (16)$$

式中 $\Psi(f_x, f_y)$ 为空间频谱分布函数, 它是光场复振幅分布函数 $\Phi(f_x, f_y)$ 的傅里叶变换式。而 \bar{f}_x 则为空间频率分布的一阶矩, 它表示光束“重心”的传播方向。对(16)式积分, 可以得到

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \lambda \bar{f}_x (z_2 - z_1) \quad (17)$$

采用同样的方法, 还可得到 \bar{y} 的传播规律为

$$\bar{y}_2 = \bar{y}_1 + \lambda \bar{f}_y (z_2 - z_1) \quad (18)$$

其中

$$\bar{f}_y = \iint_{\infty} f_y |\Psi(f_x, f_y)|^2 df_x df_y \quad (19)$$

式中角标“1”和“2”分别表示横截面 1 和横截面 2。由傅里叶光学可知^[12, 13], 在忽略了瞬逝波的情况下, $|\Psi(f_x, f_y)|^2$ 是一个与轴坐标 z 无关的不变量, 所以 \bar{f}_x 和 \bar{f}_y 也都是和轴坐标 z 无关的不变量。由此可见, \bar{x} 、 \bar{y} 随 z 的变化而成线性变化, 即光束“重心”所走路线为直线。利用这一特性, 可将 z 轴选取在光束“重心”的传输线上, 使得 \bar{x} 、 \bar{y} 、 \bar{f}_x 、 \bar{f}_y 都为 0, 以方便以下的分析。

把 \bar{x}^2 对 z 求一阶微分, 并综合利用(7)式、分步积分和远场边界条件, 可以得到

$$\frac{d\bar{x}^2}{dz} = \iint_{\infty} x^2 \left(2\Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial z} + \Phi_0 \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(2\Phi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial x} + \Phi_0 \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right) dx \right] \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(2\Phi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial y} + \Phi_0 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) dy \right] \\
&= 2 \iint_{\infty} x \Phi_0 \frac{\partial L}{\partial x} dx dy
\end{aligned} \tag{20}$$

利用(2)式, 并使用帕塞伐定理, 则可把(20)式变换为

$$\frac{d \overline{x^2}}{dz} = - \frac{i}{k} \iint_{\infty} f_x (\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}) df_x df_y \tag{21}$$

由傅里叶光学可知^[12-13], 在忽略了瞬逝波的情况下, 空间频谱函数 $\Psi(f_x, f_y)$ 随轴坐标 z 的变化规律为

$$\Psi_z(f_x, f_y) = \Psi_1(f_x, f_y) \exp [ik(z - z_1) \sqrt{1 - \lambda^2 f_x^2 - \lambda^2 f_y^2}] \tag{22}$$

式中角标“1”和“z”分别表示横截面 1 和轴坐标为 z 的横截面。把(22)式代入(21)式得到

$$d \overline{x^2} / dz = 2\lambda^2 \overline{f_x^2} (z - z_1) + A_{1x} \tag{23}$$

$$\text{式中 } \overline{f_x^2} = \iint_{\infty} \frac{f_x^2 |\Psi(f_x, f_y)|^2}{\sqrt{1 - \lambda^2 f_x^2 - \lambda^2 f_y^2}} df_x df_y, \quad A_{1x} = \frac{i}{k} \iint_{\infty} f_x (\psi_1 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x}) df_x df_y \tag{24}$$

(24)式中的积分区域本来应为 $f_x^2 + f_y^2 \leq 1/\lambda^2$, 但由于已经假定了瞬逝波为 0, 所以为了表述上的方便起见, 可以把积分限取为无穷大。由于 $|\Psi(f_x, f_y)|^2$ 与轴坐标 z 无关, 所以 $\overline{f_x^2}$ 也是一个与轴坐标 z 无关的不变量。对(23)式积分, 则可得到

$$\overline{x_z^2} = \overline{x_1^2} + A_{1x}(z - z_1) + \lambda^2 \overline{f_x^2} (z - z_1)^2 \tag{25}$$

由(25)式知, 光强二阶矩 $\overline{x^2}$ 有一个最小值, 该最小值 $\overline{x_{0x}^2}$ 和它所在的轴坐标位置 z_{0x} 及其关系为

$$\overline{x_{0x}^2} = \overline{x_{z_1}^2} - A_{1x}^2 / 4\lambda^2 \overline{f_x^2}, \quad z_{0x} - z_1 = - A_{1x} / 2\lambda^2 \overline{f_x^2} \tag{26}$$

$$\overline{x_{z_1}^2} = \overline{x_{0x}^2} + \lambda^2 \overline{f_x^2} (z_1 - z_{0x})^2 \tag{27}$$

由于横截面 1 并没有什么特别的限定, 它可以是任何一个横截面, 因而可以把角标“1”去掉, 由此可以得到

$$\overline{x_z^2} = \overline{x_{0x}^2} + \lambda^2 \overline{f_x^2} (z - z_{0x})^2 \tag{28}$$

同样, 对于 y 方向, 可以得到类似的结果

$$\overline{y_z^2} = \overline{y_{0y}^2} + \lambda^2 \overline{f_y^2} (z - z_{0y})^2 \tag{29}$$

其中

$$\overline{f_y^2} = \iint_{\infty} \frac{f_y^2 |\Psi(f_x, f_y)|^2}{\sqrt{1 - \lambda^2 f_x^2 - \lambda^2 f_y^2}} df_x df_y \tag{30}$$

由于假定了 \overline{x} 、 \overline{y} 、 $\overline{f_x}$ 、 $\overline{f_y}$ 都为 0, 所以二阶矩 $\overline{x^2}$ 、 $\overline{y^2}$ 的变化规律就代表了标准方差 $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ 、 $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2$ 的变化规律。(28)式和(29)式表明, σ_x^2 、 σ_y^2 随 z 的变化而成抛物线性变化, 它们都存在有最小值 σ_{0x} 、 σ_{0y} , 且 $\sigma_x(z)$ 、 $\sigma_y(z)$ 在 $z \rightarrow \infty$ 时都有渐近线存在。这些特性是和傍轴光束标准方差的变化规律相同的。同样仿文献[4], 进一步把非傍轴光束的 M^2 因子定义为

$$M_x^4 = 16\pi^2 \sigma_{0x}^2 \overline{f_x^2} = 16\pi^2 \overline{x_{0x}^2} \overline{f_x^2}, \tag{31}$$

$$M_y^4 = 16\pi^2 \sigma_{0y}^2 \overline{f_y^2} = 16\pi^2 \overline{y_{0y}^2} \overline{f_y^2} \tag{32}$$

至此, 已完全把 Siegman 的二阶矩方法推广到了非傍轴的标量光束。在下一节中, 将对一些有关的问题进行讨论。

可以证明, 由(31)式(或(32)式)所定义的 M^2 因子存在有一个只能无限趋近, 却永远都不可能达到的下限 1, 而与这个下限 1 相对应的基准光束则为光腰半径趋向于无穷大的最理想高斯光束(限于篇幅, 将另文讨论)。值得强调的是, 即使是对于这种光腰半径趋向于无穷大的理想高斯光束来说, 它的 M^2 因子也只能无限趋近于 1, 却永远都不可能精确地等于 1。

3 推广与讨论

1) 由瞬逝波的瞬逝特性可知, 它一般在几个波长的范围内就会快速地衰减为 0, 这一特性表明, 在距离光源(或障碍物)有很多个波长距离以外的自由空间中, 瞬逝波实际上是完全不存在的。由此可见, 只要不在光源(或障碍物)附近几个波长的范围内来考察光束的传输特性, 则本文所作的忽略掉瞬逝波的近似就是完全合理的。

2) 由上节的分析与结果可知, 非傍轴光束二阶矩的传播规律与傍轴光束二阶矩的传播规律的不同之处仅仅在于 $\overline{f_x^2}$ 、 $\overline{f_y^2}$ 的表达式不同。对于傍轴光束来说, 由于 $\lambda^2 f_x^2 + \lambda^2 f_y^2 \ll 1$, 因而 $\sqrt{1 - \lambda^2 f_x^2 - \lambda^2 f_y^2} \approx 1$, 把这一结果代入(24)式和(30)式, 则可得到

$$\overline{f_x^2} = \iint_{\infty} f_x^2 |\Psi(f_x, f_y)|^2 df_x df_y, \quad \overline{f_y^2} = \iint_{\infty} f_y^2 |\Psi(f_x, f_y)|^2 df_x df_y \quad (33)$$

显然, 这就回到了傍轴光束 $\overline{f_x^2}$ 、 $\overline{f_y^2}$ 的表达式。由此可见, Siegman 的傍轴光束二阶矩方法是包含在非傍轴光束二阶矩方法之中的, 它是后者的一种特例情况。

3) 为了与传统的高斯类光束的光斑半径定义取得一致, 本文采用与文献[4]完全相同的做法, 把所谓“真实”的光斑半径定义为

$$W_x^2 = 4\sigma_x^2, \quad W_y^2 = 4\sigma_y^2 \quad (34)$$

把(34)式代入二阶矩的传播规律(28)式, 则可得到

$$W_x^2(z) = W_{x0}^2 + 4\lambda^2 \overline{f_x^2} (z - z_{0x})^2, \quad W_y^2(z) = W_{y0}^2 + 4\lambda^2 \overline{f_y^2} (z - z_{0y})^2 \quad (35)$$

这就是“真实”的光斑半径随轴坐标 z 的变化规律。

4) 文献[5, 6]曾引入了等效曲率半径的概念, 它的表达式为

$$\frac{1}{R_x} = 4 \iint_{\infty} x \Phi_0 \frac{\partial}{\partial z} dx dy / W_x^2 \quad (36)$$

需要指出的是, 这样的物理解释只能对傍轴光束有效, 而不能适用于非傍轴光束; 对于非傍轴的标量光束来说, R_x 的物理意义则需要重新解释。把(20)式代入(36)式, 可以得到

$$W_x / R_x = dW_x / dz \quad (37)$$

由于 dW_x / dz 表示光斑半径的切线方向, 故由(37)式可知, R_x 表示的是 $W_x(z)$ 的切线与 z 轴的交点到所考察的横截面的距离。特别地, 对于傍轴光束来说, 由于 $W_x \ll R_x$, 因而可以把 W_x 看作半径为 R_x 的圆上的一段弧长, 由此则可以把 R_x 解释为等效波面的曲率半径。当然, 对于 y 方向, 可以进行完全类似的解释。

5) 对于非傍轴的标量光束来说, 已不能再简单地沿用傍轴标量光束的发散角表达式。为此把 $W_x(z)$ 、 $W_y(z)$ 的远场渐近线与 z 轴的夹角分别定义为 x 方向和 y 方向的远场发散角。由此可以得到

$$\operatorname{tg}^2 \theta_x = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dW_x}{dz} \right)^2 = 4\lambda^2 \overline{f_x^2}, \quad \operatorname{tg}^2 \theta_y = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dW_y}{dz} \right)^2 = 4\lambda^2 \overline{f_y^2} \quad (38)$$

(38) 式就是非傍轴标量光束远场发散角的表达式。特别地, 对于傍轴标量光束来说, 由于 $\operatorname{tg} \theta_x \approx \theta_x$ 、 $\operatorname{tg} \theta_y \approx \theta_y$, 所以

$$\theta_x^2 = 4\lambda^2 \overline{f_x^2}, \quad \theta_y^2 = 4\lambda^2 \overline{f_y^2} \quad (39)$$

显然, 这样就回到了傍轴标量光束的发散角表达式。

参 考 文 献

- [1] A. E. Siegman, *Laser*, California, University Science Books, Mill Valley, 1986:
- [2] H. 韦伯, 激光谐振腔. 武汉, 华中工学院出版社, 1983 年第一版,
- [3] 吕百达, 激光光学. 成都, 四川大学出版社, 1992 年第二版,
- [4] A. E. Siegman, New developments in laser resonators, *Proc. SPIE, Optical Resonators*, 1990, **1224**: 2~ 20
- [5] P. A. Belanger, Beam propagation and the ABCD ray matrices. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(4): 196~ 198
- [6] A. E. Siegman, Defining the effective radius of curvature for a nonideal optical beam. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1991, **QE-27**(5): 1146~ 1148
- [7] M. Morin, P. Bernard, P. Galarnean, Moment definition of the pointing stability of a laser beam. *Opt. Lett.*, 1994, **19**(18): 1379~ 1381
- [8] H. Weber, Some historical and technical aspects of beam quality. *Opt. & Quant. Electron.*, 1992, **24**: S861~ S864
- [9] M. A. Porras, The best quality optical beam beyond the paraxial approximation. *Opt. Commun.*, 1994, **111**(3): 338~ 349
- [10] P. A. Belanger, Y. Champagne, C. Pare, Beam propagation factor of diffracted laser beams. *Opt. Commun.*, 1994, **105**(3): 233~ 242
- [11] 曹 清, 邓锡铭, 郭 弘, 横截面上光强的精确表述. *光学学报*, 1996, **16**(7): 897~ 902
- [12] 邓锡铭, 有限束宽光动力学. 杭州, 杭州大学出版社, 1993 年 3 月
- [13] 黄婉云, 傅里叶光学教程. 北京, 北京师范大学出版社, 1985 年 5 月
- [14] J. W. 顾德门, 傅里叶光学导论, 北京, 科学出版社, 1979 年 4 月

Optical Beam Quality Factor of Nonparaxial Light Beams. I. Definition

Cao Qing Deng Ximing Guo Hong

nal Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechan
The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 6 October 1995; revised 4 January 1996)

Abstract By taking the vectorial property of time average energy flow density and the accurate formula of the light intensity into account, the first and second intensity moments of the nonparaxial scalar beams are defined. Based on the static scalar wave equation, the propagation law of the second intensity moments of monochromatical scalar beams in free space are obtained. A new beam quality factor for nonparaxial scalar beams is introduced. Moreover, some important aspects of the intensity moments theory are discussed.

Key words optical beam quality factor, nonparaxial beam, second intensity moment.