

轴对称光束的克尔透镜矩阵及其 在克尔透镜锁模中的应用*

周国生 李仲豪 胡晓改 王 勇 贾锁堂

(山西大学电子信息技术系, 太原 030006)

摘 要 在非线性薛定谔方程的基础上较严格简明地推导了克尔介质的轴对称光束及高斯光束的 $ABCD$ 传播矩阵, 该矩阵可用于设计克尔透镜锁模。以腔二端为平面镜的任意光学系统为例, 获得了简单的普遍公式。

关键词 克尔透镜锁模, 共振腔, 光束传播矩阵。

1 引 言

对克尔透镜锁模^[1, 2]机制已有数值模拟^[3, 4]及解析研究^[5, 6]。文献[7]引入了一个含有光束质量因子的广义复曲率半径, 导出一个非线性 $ABCD$ 矩阵, 可是, 这光束质量因子对光学系统中的线性及非线性元件具有不同数值, 因此计算中必须小心。文献[5]提出了一种克尔相位调制的近似的 $ABCD$ 矩阵。文献[8]假设光强 $|u|^2 \approx c_1 + c_2 r^2$, 推导了另一个近似的 $ABCD$ 矩阵。这矩阵由光束功率 $P_0 = 0$ 时, 在克尔介质中心位置的光斑尺寸及在其他处的光束腰斑尺寸所定义。这一近似公式, 当 $P_0/P_c = 0.6$ (P_c 为光自陷临界功率) 时已出现误差。显然克尔介质的输入边界条件不应决定于 $P_0 = 0$, 而应决定于实际给定的光功率。

在慢变包络近似下, $2+1$ 维 (x, y 和 z) 光束在传播中, 二次矩满足抛物式规律, 根据这一严格结论, 作者提出了非线性克尔介质的严格的 $ABCD$ 矩阵表示, 它不但可用于高斯光束, 也可用于任意轴对称光束, 而且可用于大的光功率 P 。这矩阵直接由在光束输入面的光斑尺寸及曲率半径定义, 可以直接进行矩阵连乘运算, 不必先计算 $P=0$ 时的值再定义矩阵。本文以克尔锁模腔为例作了说明。

2 $ABCD$ 表达式

在 $2+1$ 维的无损克尔介质中, 在傍轴光学具有旋转对称的近似下, 场强 u 满足方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - \gamma |u|^2 u = 0 \quad (1)$$

其中 $k = 2\pi n_0/\lambda$, $\gamma = k^2 n_2/n_0$ 正比于非线性折射率 n_2 , 折射率 $n = n_0 + n_2 |u|^2/2$ 。由方程(1)乘

* 国家自然科学基金和山西省自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1995年6月1日; 收到修改稿日期: 1995年9月5日

u^* , 再减去该式的共轭式可得不变量,

$$I_0 \int_0^\infty |u|^2 r \, dr = \int_0^\infty |u_0|^2 r \, dr \quad (2)$$

用类似方法可得不变量

$$I_2 = \int_0^\infty \left[|\Delta u|^2 - \frac{\gamma}{2} (uu^*)^2 \right] r \, dr = \int_0^\infty \left[|\Delta u_0|^2 - \frac{\gamma}{2} (u_0 u_0^*)^2 \right] r \, dr \quad (3)$$

式中 u_0 表示 $z = 0$ 处的场包络振幅。光斑尺寸相应于强度分布的二次矩,

$$W^2 = \frac{2}{I_0} \int_0^\infty uu^* r^3 \, dr \quad (4)$$

光束有效曲率半径定义为

$$(1/R(z)) = (1/2W(z)^2) (dW(z)^2/dz) \quad (5)$$

对高斯光束, $u = A(z) \exp [(-r^2/w^2) + (ikr^2/2R)]$, 则 $W^2 = w^2(z)$, $R(z) = R$, 而且有

$$I_0 = A^2 w^2 / 4, \quad I_2 = \frac{I_0}{2} \left[(4/w^2) + (k^2 w^2 / R^2) - (\gamma A^2 / 2) \right] \quad (6)$$

在非线性和克尔介质中, 二次矩的传播服从抛物律^[7]。

$$W(z)^2 = W_0^2 [1 + (2z/R_0) + Hz^2] \quad (7)$$

式中 W_0 和 R_0 分别为在克尔介质输入面 ($z = 0$) 处的二次矩与有效曲率半径, 其中 H 为

$$H = (2I_2/k^2 I_0 W_0^2) \quad (8)$$

对于高斯光束

$$H = (1/R_0^2) + (\lambda^2/\pi^2 n^2 W_0^2) (1 - \gamma I_0/2) \quad (9)$$

从(7)式可见, 当 $H < 0$, 克尔介质长度必须满足

$$z < \frac{1}{R_0 |H|} + \frac{1}{|H|} \left[\frac{1}{R_0^2} - |H| \right]^{1/2} \quad (10)$$

否则光束将聚焦到一点而崩塌。光束的复光束曲率半径定义为:

$$1/Q(z) = (1/R(z)) - (i\lambda/\pi n W(z)^2) \quad (11)$$

式中 $R(z)$ 和 $W(z)$ 由(4)、(5)式决定, 显然, Q 是通常的高斯光束的复数曲率半径的推广。

复曲率半径为 Q_0 的光束通过以 $ABCD$ 传播矩阵描述的光学系统, 其输出端的 Q 值为

$$(1/Q) = (C + D/Q_0)/(A + B/Q_0) \quad (12)$$

分虚、实部且用(7)式和(11)式可得

$$\frac{W(z)^2}{W_0^2} = \frac{A^2 + (2AB/R_0) + B^2(R_0^{-2} + z_0^{-2})}{AD - BC} = 1 + \frac{2z}{R_0} + Hz^2 \quad (13)$$

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{AC + [(AD + BC)/R_0] + BD(R_0^{-2} + z_0^{-2})}{A^2 + 2(AB/R_0) + B^2(R_0^{-2} + z_0^{-2})} = \frac{1/R_0 + Hz}{1 + (2z/R_0) + Hz^2} \quad (14)$$

式中 $z_0 = \pi n w_0^2 / \lambda$, $AD - BC = 1$, 令 $A = D$, 得克尔非线性介质的光束传播矩阵^[7,8]

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 1 & z \\ c_0 & 1 \end{vmatrix} \quad (15)$$

其中 $\beta = (1 - c_0 z)^{-1/2} = (1 + 2z/R_0 + Hz^2)^{-1/2} [1 + 2z/R_0 + (R_0^{-2} + z_0^{-2})z^2]^{-1/2}$ (16)

$$c_0 = [H - (R_0^{-2} + z_0^{-2})]z / [1 + 2z/R_0 + Hz^2] \quad (17)$$

对于高斯光束 $c_0 = - (zP_0/P_c) [z_0^2(1 + z/R_0)^2 + z^2(1 - P_0/P_c)]^{-1}$ (18)

其中 $P_0 = \epsilon_0 c n_0 2\pi / I_0$ 为光束功率, $P_c = \epsilon_0 c n_0 (4\pi/r)$ 为光束自陷临界功率, 在这功率下, 非线性

自聚焦与光束的衍射平衡, 光斑尺寸保持不变。

这一矩阵依赖于克尔介质长度 z 、以及介质表面的边界条件, 它等价于一个厚透镜, 它的主面在输入、输出平面外的 $(1 - \beta)/\beta c_0$ 处, 焦距为 $f = -1/\beta c_0 = -(1 - c_0 z)^{1/2}/c_0$ 。

当 $H < 0$ 、 $P_0 > P_c$ 、 $c_0 < 0$ 、 $\beta < 1$ 、 $f^{-1} = -\beta c_0 > 0$, 在非线性介质中有自聚焦。当 $H = 0$ 、 $1/R_0 = 0$, 或 $P_0 = P_c$ 、 $c_0 = -z/z_0^2$, 光束在克尔介质中传播时, 其二次矩 $W(z)$ 保持不变, 形成光自陷。当 $H = R_0^{-2} + z_0^{-2} > 0$, 则 $c_0 = 0$ 、 $\beta = 1$, 这介质不是克尔非线性介质, 矩阵化为 $\begin{vmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 。当 $0 < H < R_0^{-2} + z_0^{-2}$ 、 $\beta < 1$ 、 $c_0 > 0$, 呈弱克尔非线性, 非线性不足以补偿衍射效应。当 $H > R_0^{-2} + z_0^{-2}$ 、 $\beta > 1$ 、 $c_0 > 0$, 焦距将小于 0, 克尔非线性 $\gamma < 0$, 将发生自散焦。

矩阵(15)式可分解为

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c_0(1 - c_0 z)^{-1/2} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (19)$$

其中
$$l = \begin{cases} c_0^{-1}[1 - (1 - c_0 z)^{1/2}] & c_0 \neq 0 \\ z/2 & c_0 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

(19)式矩阵乘积中的中间矩阵是非线性的, 等价于焦距为 $-(1 - c_0 z)^{1/2}/c_0$ 的薄透镜, 它二边的矩阵相当于一长为 l 的介质。当 $c_0 < 0$ 、 $0 \leq l \leq z/2$, 由于自聚焦, 等价距离 l 自行缩短; 对负克尔介质, 等价距离自行增长。

前面的讨论只涉及光束在克尔介质中间传播。考虑到真空与克尔介质的界面, 可得到从真空进入克尔介质再至真空的矩阵为

$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} 1 & z/n \\ nc_0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & l' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ nc_0(1 - c_0 z)^{-1/2} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & l' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (21)$$

其中
$$l' = \begin{cases} (nc_0)^{-1}[1 - (1 - c_0 z)^{1/2}] & c_0 \neq 0 \\ z/2n & c_0 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

且有 $R_0 = nR$ 、 $W_0 = W$ 、这里 R 和 W 分别表示刚在克尔介质输入端面外真空中的曲率半径和二次矩。当 $c_0 z/n \ll 1$, 上述矩阵可简化为

$$\begin{vmatrix} 1 & z/2n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ nc_0(1 - c_0 z/2)^{-1/2} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & z/2n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (23)$$

中间矩阵代表一非线性薄透镜, 其焦距为

$$f = (z/2n) - (1/nc_0) = \frac{z_0^2(1 + z/R_0)^2 + z^2(1 - P_0/P_c)}{nzP_0/P_c} + \frac{z}{2n} \quad (24)$$

两边矩阵代表光束通过线性距离 $z/2n$ 。

3 应 用

可以利用 $ABCD$ 矩阵计算含克尔介质的锁模激光器特性。设一个克尔介质在二个任意光学系统之间, 在外面围以二平面镜 M_1 和 M_2 , 如图 1 所示。由(21)式所示的克尔介质的非线性矩阵可用在镜 1 处的光斑尺寸来表示:

$$(nc_0)^{-1} = (L/n) - (\theta/P) \quad (25)$$

式中 L 为克尔介质长度, P 为归一化功率, $P = P_0/P_c$ 。

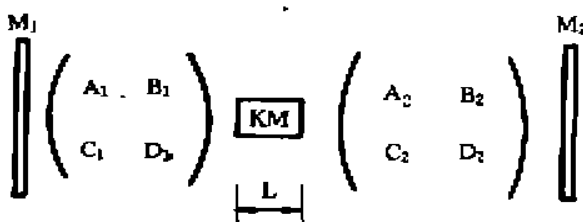


Fig. 1 Matrix description of the resonator

$$\theta = (L/n) + (nz_1^2/L)[A_1(A_1 + LC_1/n) + (B_1/z_1^2)(B_1 + D_1L/n)]^2 \quad (26)$$

$$Z_1 = \pi W_1^2/\lambda$$

从镜 1 至镜 2 的单程传播矩阵为

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{vmatrix} = \beta_{ac} \begin{vmatrix} a_2 - a_1\theta/P & b_2 - b_1\theta/P \\ c_2 - c_1\theta/P & d_2 - d_1\theta/P \end{vmatrix} \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1A_2 + B_2C_1 + A_2C_1L/n, & a_2 &= a_1L/n + A_1B_2, \\ b_1 &= A_2B_1 + B_2D_1 + A_2D_1L/n, & b_2 &= b_1L/n + B_1B_2, \\ c_1 &= A_1C_2 + D_2C_1 + C_2C_1L/n, & c_2 &= c_1L/n + A_1D_2, \\ d_1 &= B_1C_2 + D_2D_1 - C_2D_1L/n, & d_2 &= d_1L/n + B_1D_2. \end{aligned} \quad (28)$$

这最后的八个参数只依赖于光学几何参数。注意到光束波前应 与端面镜曲率相匹配, 可得 $z_1^2 = -\mathcal{B}\mathcal{D}/\mathcal{A}\mathcal{C}$, 将(25)、(27)式代入上式, 可得

$$v_1P^2 - \theta v_2P + \theta^2 v_3 = 0 \quad (29)$$

$$v_1 = z_1^2 a_2 c_2 + b_2 d_2, \quad v_2 = (a_2 c_1 + a_1 c_2) z_1^2 + b_2 d_1 + b_1 d_2, \quad v_3 = a_1 c_1 z_1^2 + b_1 d_1$$

(29)式表示了光斑尺寸 W_1 对归一化功率的依赖关系。这是 P 的二阶代数方程, W_1 的高阶方程。从以上方程立即可得到在功率为零时, 在镜 1 处的光斑尺寸及初斜率 $(dz_1/dP)_{P=0}$ 为:

$$(W_1^2)_{P=0} = (\lambda/\pi)(-b_1 d_1/a_1 c_1)^{1/2},$$

$$(dz_1/dP)_{P=0} = \frac{a_1 c_1 (b_1 d_2 + b_2 d_1) - b_1 d_1 (a_1 c_2 + a_2 c_1)}{2z_1 \theta a_1^2 c_1^2}.$$

只有当 $(dz_1/dP)_{P=0} < 0$, 即 $(b_1 d_2 + b_2 d_1) - (b_1 d_1)/a_1 c_1 (a_1 c_2 + a_2 c_1) < 0$ 时, 才有可能存在自聚焦效应, 达到锁模效果。一般说当 $(dz_1/dP)_{P=0}$ 达最小时, 可获得最优化腔设计, 可惜 $\frac{d}{dx}(\frac{dz_1}{dP})_{P=0}$ 的解析表达式过繁, 有待进一步研究。

稳定性条件可由 $0 < \mathcal{A}\mathcal{D} < 1$ 给出 $0 \leq [a_1 - A_1 B_2 P(\theta - LP/n)^{-1}][d_1 - P d_2/\theta] \leq 1$ 当 $P = 0$, 稳定性条件简化为不含克尔介质的谐振腔的稳定性条件。

由代数方程(29)给定不同的 W_1 值, 可以算出在此几何位形下的 P 。这样利用了克尔介质的非线性矩阵, 可以直接, 简单地用代数方程解出腔传输特性。

图 2 表示一典型的含克尔介质的四镜腔。图 3 表示当 $x = 4.4$ cm 和 $x = 5.2$ cm 时, W_1 与归一化功率 P 的关系曲线, 此曲线与文献[9]所绘出的 $W_1 \sim P$ 的关系曲线相似, 当 $x = 5.2$

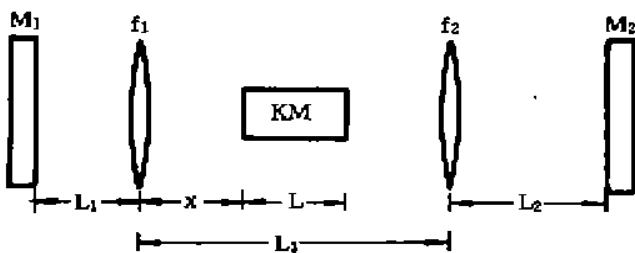


Fig. 2 Schematic of the cavity. The resonator parameters are $l_1 = 70$ cm, $l_2 = 90$ cm, $f_1 = 5$ cm, $z = 10.7$ cm, $d = 1$ cm; KM is the Kerr medium with refractive index $n = 1.76$

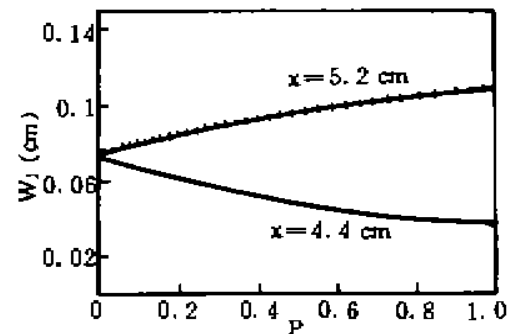


Fig. 3 The Gaussian spot size on mirror M_1 of the resonator, shown in fig. 2 as a function of the normalized power P for different positions of the Kerr medium

cm 时, $dW_1/dP > 0$, 没有自聚焦效应, 不能达到锁模效果; 当 $x = 4.4$ cm 时, $dW_1/dP < 0$, 随着 P 的增大, W_1 减小, 由此可以产生光脉冲压缩的锁模作用。

结 论 本文从克尔介质中轴对称光束的二次矩的传播满足抛物律出发, 得到了 $ABCD$ 矩阵的严格表达式。这一表达式直接依赖于非线性参数及输入光束特性, 不需要先算 $P = 0$ 的值才能定义矩阵, 再计算矩阵乘积。它可用于轴对称光束, 自然也可用于轴对称高斯光束; 既可用于小功率 P , 也可用于大的 P 。矩阵表达式比以前的严格, 简明。根据不同 H 值, 可以判断克尔介质的自聚焦特性。作为一应用例子, 本文以二端面为平面镜的克尔透镜锁模腔系列为例, 得到了简明的 P 的二次代数方程, 求得了为产生自聚焦透镜锁模所必须的 $(dz_1/dP)_{P=0} < 0$ 的解析表达式。

参 考 文 献

- [1] D. E. Spence, P. N. Kean, W. Sibbett, 60-fsec pulse generation from a self-mode-locked Ti:sapphire laser. *Opt. Lett.*, 1991, 16(1): 42~44
- [2] M. Pichè, Beam reshaping and self-mode-locking in nonlinear laser resonators. *Opt. Commun.*, 1991, 86(2): 156~160
- [3] S. Chen, J. Wang, Self-starting issues of passive self-focusing mode. *Opt. Lett.*, 1991, 16(21): 1689~1691
- [4] G. W. Pearson, C. Radzewics, J. S. Krasinski, Analysis of self-focusing mode-locked lasers with additional highly nonlinear self focusing elements. *Opt. Commun.*, 1992, 94(4): 221~226
- [5] H. A. Haus, J. C. Fujimoto, E. P. Ippen, Analytic theory of additive pulse and Kerr lens mode-locking, G. P. A. Malcolm, A. I. Ferguson, Self-mode locking of a diode-pumped Nd:YLF laser. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1992, QE-28(10): 2086~2096
- [6] T. Brabec, Ch. Spielmann, P. F. Curley et al., Kerr lens mode locking. *Opt. Lett.*, 1992, 17(18): 1292~1294
- [7] C. Pare, P. A. Belanger, Beam propagation in a linear or nonlinear lens-like medium using ABCD ray matrices; the method of moments. *Opt. & Quant. Electron.*, 1992, 24(9): S1051~S1070
- [8] V. Magni, G. Cerullo, S. De Silvestri, ABCD matrix analysis of propagation of Gaussian beams through Kerr media. *Opt. Commun.*, 1993, 98(4~6): 348~355
- [9] V. Magni, G. Cerullo, S. De Silvestri, Closed form Gaussian beam analysis of resonators containing a Kerr medium for femtosecond lasers. *Opt. Commun.*, 1993, 101(5~6): 365~370
- [10] O. E. Martinez, J. L. A. Chilla, Self-mode-locking of Ti:Sapphire lasers: a matrix formalism. *Opt. Lett.*, 1992, 17(17): 1210~1212

ABCD Matrix Expression for Propagation of an Axial Symmetrical Beam Through Kerr Medium and Its Application to Kerr Lens Mode-Locking

Zhou Guosheng Li Zhonghao Hu Xiaogai Wang Gang Jia Suotang

(Department of Electronic and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006)

(Received 1 June 1995; revised 5 September 1995)

Abstract An ABCD matrix expression for propagation of both axial symmetrical and Gaussian beam through Kerr medium is derived based on the nonlinear Schrodinger equation. This expression is simpler than others and can be used to design resonators for Kerr lens mode-locking. As one of the applications a type of resonators for Kerr lens mode-locking is discussed.

Key words Kerr lens mode-locking, resonator, matrix of beam propagation.