

大气湍流相干长度和 Strehl 比的统计特征

王英俭 吴 毅 龚知本

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

摘 要 对大气湍流相干长度的统计特征进行了理论分析, 给出了其概率分布密度函数, 同时分析了光束大气传输湍流效应的远场斯特列尔(Strehl)比的随机分布特征, 得到了与实验非常一致的结果。

关键词 湍流, 相干长度, 概率分布。

1 引 言

光波在大气中传输的湍流效应通常用大气相干长度来描述^[1]。根据传统定义, 大气相干长度是描述特定平稳随机过程或具有平稳增量随机过程的湍流状态平均强度即满足各态历经定理条件下的系综量^[1]。然而, 实际大气湍流是局地各向均匀同性的, 只能在较短的时间尺度内才维持平稳性, 对其特征参数测量的统计时间尺度也是有限的而且通常是较难以满足各态历经定理的。另一方面, 在许多实际工程应用中, 有时也常常仅关心较短时间内的大气湍流状态及激光大气传输特性。实验表明, 在不满足各态历经定理条件下对实际大气及室内湍流模拟池中的横向相干长度及光束传输湍流效应特征参量(如斯特列尔比)等的测量结果均仍表现为随机性^[2, 3]。但在以往的研究工作中, 对这种随机性没有进行更深入的物理分析, 而仅仅用平均量来描述光学湍流效应^[3, 4]。本文着重讨论这种随机特征参量的统计规律, 给出了描述湍流横向相干长度的统计特征的理论模型, 同时分析了光束大气传输湍流效应的远场斯特列尔比的随机分布特征。

2 理论分析

2.1 相干长度的统计特征

大气湍流横向相干长度的测量通常都采用测量光束大气传输到达角起伏方差来换算。在满足各态历经定理条件下, 到达角起伏方差 σ_θ^2 与相干长度 r_0 有如下关系^[4]:

$$\sigma_\theta^2 = 0.364(D/r_0)^{-5/3}(\lambda/D)^2 \quad (1)$$

式中 D 为接收孔径, λ 为光波波长。但是, 实际测量光束通过大气的到达角起伏总是在有限时间内进行的, 因此, 在一般情况下是难以做到满足各态历经定理条件的, 这样实测得到的到达角起伏方差 σ_θ^2 应该是一个随机量, 如果同样采用关系式(1)来计算横向相干长度 r_0 , 则 r_0 值

必然是围绕着系综值 r_0 (理论极限) 而随机起伏的,

$$r_1 = [0.364D^2(\lambda/D)^2/\sigma_1^2]^{1/2} \quad (2)$$

很明显 r_1 是代表所处测量状态下的湍流起伏强度的随机特征量。众所周知, 对各向均匀同性湍流而言, 光束到达角起伏是满足均值为零的相互独立的二维正态分布随机过程, 而且 $\sigma_x^2 = 2\sigma_y^2 = 2\sigma_z^2$, 即有:

$$P(\theta_x, \theta_y) = (1/\pi\sigma_0^2) \exp [-(\theta_x^2 + \theta_y^2)/\sigma_0^2] \quad (3)$$

式中 θ_x, θ_y 分别为 x, y 两个方向的到达角起伏, $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ 为满足各态历经定理条件下的到达角起伏的统计方差。令 $\beta_n = \theta_x^2 + \theta_y^2$, 则 β_n 的概率密度函数为:

$$P(\beta_n) = (1/\sigma_0^2) \exp(-\beta_n/\sigma_0^2) \quad (4)$$

假设测量过程是统计独立的, 相互独立的 N 个元素的子样之和 $\beta = \sum_{i=1}^N \beta_i$, 作为一随机过程, 其特征函数为^[5]:

$$f_\beta(\omega) = g^N(\omega) \quad (5)$$

由(4)式不难得到随机过程 β_n 的特征函数 $g(\omega)$ 为:

$$g(\omega) = (1 + i\omega\sigma_0^2)^{-1} \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式后并进行逆傅里叶变换即得随机变量 β 的概率密度函数:

$$P(\beta) = [1/\sigma_0^2(N-1)!] (\beta/\sigma_0^2)^{N-1} \exp(-\beta/\sigma_0^2) \quad (7)$$

这样, 对于由相互独立的 N 个元素的子样统计得到的方差 $\sigma_1^2 = \beta/N$, 其概率密度函数为:

$$P(\sigma_1^2) = [N/\sigma_0^2(N-1)!] (N\sigma_1^2/\sigma_0^2)^{N-1} \exp(-N\sigma_1^2/\sigma_0^2) \quad (8)$$

利用(1)式、(2)式、(8)式, 即可得到 r_1 的概率密度函数为:

$$P(r_1) = (5/3) [N(r_0/r_1)^{5/3}]^N \exp[-N(r_0/r_1)^{5/3}] / [r_1(N-1)!] \quad (9)$$

由(9)式可以得到 r_1 的均值和均方值分别满足下列递推关系:

$$\begin{aligned} \langle r_1(N) \rangle &= [(1 - 8/5N)/(1 - 1/N)^{5/3}] \langle r_1(N-1) \rangle \quad (N > 2) \\ \langle r_1(N) \rangle &= \Gamma(2/5)r_0 \quad (N = 1) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle r_1^2(N) \rangle &= [(1 - 11/5N)/(1 - 1/N)^{11/5}] \langle r_1^2(N-1) \rangle \quad (N > 3) \\ \langle r_1^2(N) \rangle &= 2\Gamma(4/5)r_0^2 \quad (N = 2) \end{aligned} \quad (11)$$

由(10)式, (11)式可以看到, 当 N 趋近无穷时, r_1 的方差趋于零, 均值趋近于满足各态历经定理条件下的 r_0 。表 1 列举了 $N = 10 \sim 200$ 情况下 r_1 的均值和方差与 r_0 的关系, 可以看到, r_1

Table 1. Mean square, mean and variance of r_1 vs N

N	$\langle r_1^2(N) \rangle / r_0^2$	$\langle r_1(N) \rangle / r_0$	σ_{r_1} / r_0	N	$\langle r_1^2(N) \rangle / r_0^2$	$\langle r_1(N) \rangle / r_0$	σ_{r_1} / r_0
10	1.150409	1.051092	0.213575	110	1.012135	1.004376	0.057987
20	1.070307	1.024739	0.142181	120	1.011113	1.004009	0.055479
30	1.045874	1.016319	0.113882	130	1.010250	1.003698	0.053285
40	1.034043	1.012174	0.097707	140	1.009511	1.003432	0.051328
50	1.027063	1.009706	0.086920	150	1.008872	1.003201	0.049586
60	1.022458	1.008070	0.079068	160	1.008313	1.003000	0.047992
70	1.019193	1.006905	0.073032	170	1.007820	1.002822	0.046559
80	1.016756	1.006034	0.068195	180	1.007383	1.002664	0.045245
90	1.014869	1.005358	0.064209	190	1.006992	1.002523	0.044031
100	1.013363	1.004818	0.060852	200	1.006640	1.002396	0.042914

的起伏方差收敛速度是相当慢的。当 $N = 50$ 时, 尽管 r_1 非常接近于 r_0 ($r_1 = 1.0097r_0$), 但其起伏均方根为 $0.0869r_0$, 即随机相对起伏仍然有 8.69% , 当 $N = 200$ 时相对起伏才减小到 4.29% 。

2.2 斯特列尔的统计特征

激光在湍流大气中传输的光束质量通常采用斯特列尔比来描述, 在光束波前起伏方差 $\sigma_s^2 < 1.0$ 的条件下近似地有:

$$S = \exp(-\sigma_s^2) \quad (12)$$

在较弱湍流及自适应光学系统位相补偿的大多实际情况下, (12) 式均能较好地满足。同样, 在不满足各态历经定理条件下统计得到的光束波前起伏方差也仍是一随机量, 斯特列尔比仍然由 (12) 式来计算, 这样得到的斯特列尔比 S_1 也是围绕着系综值 S_0 (理论极限) 而随机起伏的。与光束到达角起伏一样, 光束在各向均匀同性湍流大气中传输的波前起伏也是一均值为零的正态分布随机过程。假定位相方差的统计不相关点数为 $2M$, 则不满足各态历经定理条件下的斯特列尔比 S_1 的概率密度分布函数:

$$P(S_1) = -[(M-1)! S_1 \ln S_1]^{-1} (M \ln s_1 / \ln s_0)^M \exp(-M \ln S_1 / \ln S_0) \quad (13)$$

S_1 的均值和均方值满足下列关系:

$$\langle S_1 \rangle = [1 - \ln(S_0)/M]^{-M} \quad (14)$$

$$\langle S_1^2 \rangle = [1 - 2 \ln(S_0)/M]^{-M} \quad (15)$$

由 (14)、(15) 可以看到, 当 M 趋近无穷时, S_1 的方差趋于零, 均值趋近于满足各态历经定理条件下的 S_0 。

3 实 验

在实际参数测量中通常假定随机过程是平稳的, 从而可利用平稳随机过程的性质对其时间过程抽样统计作为系综统计。通常情况下的时间抽样是相关的, 此时可由下面的简化模型来确定测量量子样中的不相关点数 N :

$$N = T/\tau \quad (16)$$

式中 T 为观测总时间, τ 为大气湍流的特征相关时间

$$\tau = \int_0^{\infty} B(t) dt / \sigma_s^2 \quad (17)$$

式中 $B(t)$ 为相关函数。当 $T < \tau$ 时, $N = 1$; 但在实际测量中一般要求 $T \gg \tau$ 。在斯特列尔比的测量中, 考虑到波前方差是由整个光束接收孔径 D_0 上的波前起伏统计得到的, 所以其统计不相关点数应由下式估算

$$M = T(D_0/\rho_0)^2 / (2\tau) \quad (18)$$

其中 ρ_0 为光束波前的空间相关距离。

图 1 为室内湍流模拟池中激光传输湍流效应及其自适应光学位相补偿实验的布局框图。模拟湍流池为对流湍流池, 介质为水, 底面加热、上面冷却, 并由自动控制系统控制两面温差使湍流处于稳定状态, 调节温差大小即可调节湍流强度, 湍流谱为 Von-Karman 谱。自适应光学系统由成都光电所研制, 变形镜单元数为 37 单元, 孔径 100 mm, 采用哈特曼 (Hartmann) 波前传感器进行波前探测, 通过波前处理得到控制信号控制变形镜和倾斜镜实现波前共轭以对主激光的位相畸变进行补偿。主激光和信标均采用波长 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 的 He-

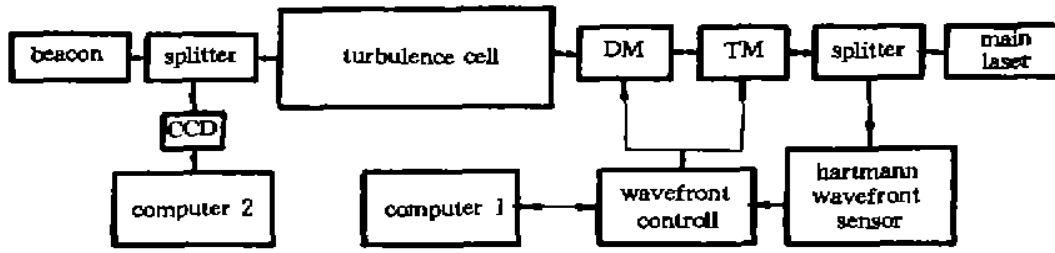


Fig. 1 Experiment layout

Ne 激光，传输光束直径为 30 mm。实验中，利用哈特曼波前传感器在自适应光学系统开环情况下测量湍流的横向相干长度，其接收子镜 D 约为 5 mm。为更好地满足(12)式的近似条件，在自适应光学系统闭环控制情况下，将接收端 CCD 采样的主激光远场光强分布送入计算机 2，计算斯特列尔比。

图 2 为室内湍流模拟池中实测的 τ_1 的概率密度分布与(9)式计算结果的比较。到达角起伏的观测时间 $T = 75$ s，包括计算时间在内采样速率约为 9 frame/s，由文献及(17)式， τ 约为 7.5 s，则 $N = 10$ 。 τ_1 的测量个数为 3700。(9)式中的 τ_0 是对大量实测的 τ_1 求平均后再由(10)式计算得到的，从图 2 可见实验结果与理论计算较一致。实验点的起伏主要是统计量不够大造成的。

图 3 为自适应光学系统位相补偿下激光在室内湍流模拟池中传输的斯特列尔比 S_1 的概率密度分布实测结果与(13)式计算结果的比较。 $M = 10$ ， S_1 的测量个数为 1920。其中 S_0 是由大量实测的 S_1 取平均后再由(14)式计算得到的，由图 3 可以看到实验结果与理论计算非常一致，实验点的起伏也主要是统计量不够大造成的。另外，实验得到的横向相干长度 τ_1 和斯特列尔比 S_1 的概率密度分布不随测量时间的起点而改变，说明湍流池是稳定的而且是平稳随机过程。

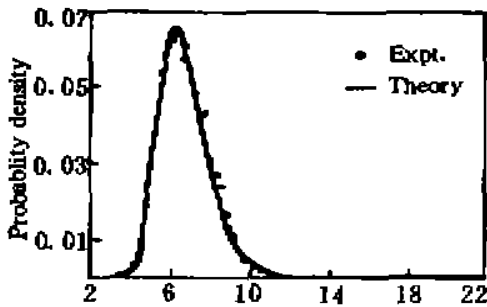


Fig. 2 Comparison of probability distribution of coherence length with the experiment results

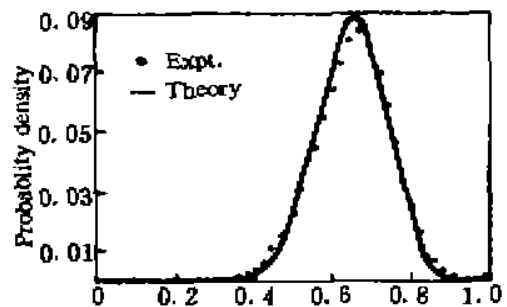


Fig. 3 Comparison of probability distribution of Strehl ratio with the experiment results

结 论 本文分析了在不满足各态历经定理条件下大气湍流横向相干长度以及光束传输远场斯特列尔比的随机特性，给出了其概率密度函数，并得到了实验的验证。这说明在不满足各态历经定理条件下分析大气传输湍流效应对光束质量的影响时，仅仅用平均湍流强度因子是不够的，还应当分析其随机分布特征。另外在实际大气相干长度的测量中，由于测量时间总是有限的，即通常测量得到的是 τ_1 ，要得到真正的系综量即湍流状态平均强度 τ_0 ，则必须根据实际测量条件(观测时间及湍流相关特性)对测量结果的平均值进行修正。事实上，本文所述的统计描述方法同样适用于分析湍流效应中其它光学参数如大气湍流折射率起伏结构常数 C_n^2 、等晕角 θ_0 等等的随机统计特征。

参 考 文 献

- [1] D. L. Fried, Limiting resolution looking down through the atmosphere. *J. Opt. Soc. Am.*, 1966, **50**(10) : 1380~1384
- [2] 吴毅, 王英俭, 曾宗泳, Optical description of convection turbulence cell using Hartmann wavefront sensor and single aperture. The 17th ILRC, Sandai, Japan, 29d8, 1994
- [3] 杨高潮, 刘小春, 范承玉等, 大气相干长度和等晕角的测量. *强激光与粒子束*, 1994, **6**(2) : 215~220
- [4] R. K. Tyson, *Principles of Adaptive Optics*, New York, Academic press, 1991
- [5] S. 潘契夫, *随机函数与湍流*(中译本), 北京, 科学出版社, 1976

The Statistics of Atmospheric Coherence Length and Strehl Ratio

Wang Yingjian Wu Yi Gong Zhiben

(*Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031*)

(Received 26 February 1995)

Abstract In this paper, the random fluctuation characteristics of the atmospheric turbulence coherence length and the light beam propagation far field strehl ratio are analysed and their probability density functions are derived based on the characteristic function of random variable. The theoretical analysis is validated by the experimental results.

Key words turbulence, coherent length, strehl ratio, probability density function.