第16卷 第8期 光 学 学 报 Vol. 16, No. 8
1996年8月 ACTA OPTICA SINICA August, 1996

振幅分布对焦移的影响 I. 傍轴光束*

曹 清 邓锡铭 郭 弘
(中国科学院上海光学精密机械研究所，高功率激光物理国家实验室，上海 201800)

摘 要 分析了傍轴非均匀振幅分布会聚球面波的焦移问题，给出了焦移量的解析表达式，并由此进一步揭示出：导致焦移的主要原因在于光束的内禀运动。

关键词 焦移， 会聚球面波， 光流体模型。

1 引 言

早在八十年代初期，Wolf 等人就已发现被截断的会聚球面波存在有焦移现象[1, 2]；随后，Carter 等人又发现未被截断的高斯光束(会聚球面波前)也存在有焦移现象[3, 4]；至今，有关焦移的文章已有多篇发表[1~8]。但所有这些文献都只讨论了截断均匀会聚球面波和截断(及非截断)高斯型振幅分布会聚球面波这两种情况，而没有讨论更为普遍的具有任意振幅分布的会聚球面波情况；更为主要的是，这些文献都是以轴上光强最大值点与几何光学焦点的偏差来作为焦移的定义。由于这种定义只是用光强的最大值点来表示波动光学中的“焦点”，这实质上只反映光束的局部聚焦特性，并没有从整体上反映光束的聚焦性质。故还需进行进一步的探讨。

最近，邓锡铭等人[9, 10]与 Siegman 等人[11]分别独立地提出了用横截面上的光强二阶矩来作为衡量光斑大小的标准，并由此而进一步把光束焦平面(光腰面)严格地定义为光斑半径最小值所在的那个横截面，从而为从光束的整体特性上来更加合理地分析会聚球面波的焦移问题提供了一个有效的途径。

本文把光束焦平面与几何光学焦平面的偏差合理地定义为会聚球面波的焦移量，并由此而给出了焦移量的解析表达式；在此基础上，还进一步地用光流体模型理论对导致焦移量的物理机制进行了分析。

2 会聚球面波的焦移公式

在讨论会聚球面波的焦移之前，先回顾一下光强二阶矩的定义及用光强二阶矩所表示的光斑半径的传播规律。众所周知，任何一个单色标量光束的复振幅分布函数 ϕ 都可表示为[9, 10]

---

* 国家高技术 863-416 资助课题。

收稿日期：1995年10月6日；收到修改稿日期：1996年1月4日

$$\phi = \phi_0 \exp(-ikL) \tag{1}$$

式中 ϕ_0 为振幅，L 为准程函（为了与几何光学中的程函概念相区别），它们都是空间坐标(x, y, z)的实函数。为了分析方便，首先假定 ϕ 已经满足归一化条件，即

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \phi^* \phi \, dx dy = 1 \tag{2}$$

由文献[9～12]可知，光强分布的一阶矩定义为

$$\bar{x} = \iint_{-\infty}^{\infty} x\phi_0^2 \, dx dy, \qquad \bar{y} = \iint_{-\infty}^{\infty} y\phi_0^2 \, dx dy \tag{3}$$

它们表示横截面上光束的"重心"位置。在真空中，$\bar{x}$、$\bar{y}$ 的传播规律为

$$\overline{x_2} = \overline{x_1} + \lambda \overline{f_x}(z_2 - z_1), \qquad \overline{y_2} = \overline{y_1} + \lambda \overline{f_y}(z_2 - z_1) \tag{4}$$

式中角标"1"、"2"分别表示横截面 1 与横截面 2，$\overline{f_x}$、$\overline{f_y}$ 为

$$\overline{f_x} = \iint_{-\infty}^{\infty} f_x |\psi(f_x, f_y)|^2 dx dy, \qquad \overline{f_y} = \iint_{-\infty}^{\infty} f_y |\psi(f_x, f_y)|^2 dx dy \tag{5}$$

而 $\psi(f_x, f_y)$ 为横截面上光场分布函数 ϕ 的空间频谱函数，它和 ϕ 构成一对傅里叶变换对，即

$$\psi(f_x, f_y) = F[\phi(x, y)], \qquad \phi(x, y) = F^{-1}[\psi(f_x, f_y)] \tag{6}$$

符号 F、F^{-1} 分别表示傅里叶变换及傅里叶逆变换。可以证明，在傍轴近似的条件下，$\overline{f_x}$、$\overline{f_y}$ 都是与轴坐标 z 无关的不变量，这就意味着光束"重心"坐标随 z 的变化而成线性变化。由此可以在不失普遍性的情况下，把坐标系的 z 轴(即光束传输轴)方便地取在光束"重心"的传输方向上，从而使得任意横截面上的 $\bar{x}(z)$、$\bar{y}(z)$ 都为 0，显然，这也是最为合理的选择方法。在对坐标系作了以上的选取之后，横截面上的光斑半径可用光强分布的二阶矩直接表示为

$$W_j^2 = 4\iint_{-\infty}^{\infty} j^2\phi_0^2 \, dx dy, \qquad j = x, y \tag{7}$$

$$W^2 = 4\iint_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)\phi_0^2 \, dx dy = W_x^2 + W_y^2 \tag{8}$$

式中的系数 4 是为了与高斯光束的光斑半径定义取得一致而引入的。由文献[11, 12]可知，在真空中的 W_x^2、W_y^2、W^2 随 z 的的变化规律为

$$W_{j2}^2 = W_{j1}^2 + 2V_{j1}(z_2 - z_1) + U_{j1}(z_2 - z_1)^2, \qquad j = x, y \tag{9}$$

$$W_2^2 = W_1^2 + 2V_1(z_2 - z_1) + U_1(z_2 - z_1)^2 \tag{10}$$

式中的下角标"1"和"2"分别表示横截面 1 和横截面 2。而式中 V_x、V_y、V，U_x、U_y、U 的值则为

$$V_j = 4\iint_{-\infty}^{\infty} j\frac{\partial L}{\partial j}\phi_0^2 \, dx dy, \qquad V = V_x + V_y,$$

$$U_j = \frac{\lambda^2}{\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial\phi}{\partial j}\right)^2 dx dy, \qquad U = U_x + U_y, \qquad j = x, y \tag{11}$$

由于焦平面对应于二阶矩的最小值，故利用极值条件从(10)式可得到光束焦平面(光腰面)的轴向坐标 z_0 为

$$z_0 - z_1 = -(V_1/U_1) \tag{12}$$

这就是光束焦平面的坐标公式。把(11)式代入(12)式，则可得到

$$z_0 - z_1 = -\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}\left(x\frac{\partial L}{\partial x} + y\frac{\partial L}{\partial y}\right)\phi_0^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{E_\perp} \tag{13}$$

其中的 $E_\perp$ 即为光流体模型中的光束截面能量的径向分量，它的具体表达式为[9,10]

$$E_\perp = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(\nabla L)_\perp^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{k^2}\iint_{-\infty}^{\infty}(\nabla\phi_0)_\perp^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{14}$$

其中的角标“⊥”表示径向分量。由文献[9，10]可知，$E_\perp$ 是一个与坐标 z 无关的守恒量。它还可进一步表示为轨道能量部分 E_t 与内禀能量部分 E_i 的和，前者对应于光束的轨道运动，是和光束的几何直线性质相联系的；后者则对应于光束的内禀运动，是和光束的干涉、衍射等波动性质相联系的。当忽略了光束的内禀运动时，就回到了简单的几何光学[9,10]。E_t 与 E_i 的具体值为

$$E_t = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(\nabla L)_\perp^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad E_i = \frac{1}{k^2}\iint_{-\infty}^{\infty}(\nabla\phi_0)_\perp^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{15}$$

现在考虑一个具有不均匀振幅分布的傍轴、单色会聚球面波，它在初始横截面上的复振幅分布函数 ϕ 可表示为

$$\phi = \phi_0 \exp[ik(x^2 + y^2)/2R] \tag{16}$$

若把所考虑的横截面取为 $z = 0$ 平面，则由程函方程可得到几何光学的焦平面位置为

$$z_{0g} = R \tag{17}$$

其中角标“g”表示几何光学。把 $z_1 = 0$ 以及(15)式、(16)式代入(13)式，则可得到光束的焦平面(光腰面)位置为

$$z_0 = \frac{R}{1 + 4E_i(R/W)^2} \tag{18}$$

其中 W^2 即是由(8)式所定义的光斑半径。由(17)式、(18)式可得到波动光学焦平面位置对几何光学焦平面位置的偏差量(焦移量)为

$$\Delta z_0 = z_{0g} - z_0 = R\frac{4E_i(R/W)^2}{1 + 4E_i(R/W)^2} \tag{19}$$

而相对焦移量则为

$$\frac{\Delta z_0}{R} = \frac{4E_i(R/W)^2}{1 + 4E_i(R/W)^2} \tag{20}$$

由(20)式可见，相对焦移量与 E_iR^2/W^2 有唯一的对应关系，它的值由 E_iR^2/W^2 的值唯一地决定。这一特性说明，可以象定义高斯光束的有效费涅耳数那样[3]，也定义一个会聚球面波的等效费涅耳数 F_{eff}

$$(1/F_{\mathrm{eff}}^2) = 4\pi^2 E_i(R/W)^2 \tag{21}$$

利用(21)式，则可把相对焦移量简单地表示为

$$(\Delta z_0/R) = [1/(1 + \pi^2 F_{\mathrm{eff}}^2)] \tag{22}$$

特别当 $(E_iR^2/W^2) \ll 1$ 时，(22)式则可进一步地简化为

$$(\Delta z_0/R) \approx (1/\pi^2 F_{\mathrm{eff}}^2) \tag{23}$$

以上的结果可适用于任意振幅分布的傍轴会聚球面波。显然，当 ϕ_0 为高斯型振幅分布时，则就退化为高斯光束的焦移量公式。

3 讨 论

1) 在光流体模型理论中，光束的运动被区分为轨道运动与内禀运动两个部分，它们分别代表光束的几何直线特性与波动光学的衍射等特性；而光束的轨道能量 E_t 与内禀能量 E_i 则分别与这两种运动形式相对应[9,10]。由(18)式可知，内禀能量 E_i 对光束焦平面的位置有至关重要的作用，它反映了光束内禀运动对焦平面位置的影响，当 E_i 趋向于 0 时(在某些情况下，这相当于取 $\lambda\to 0$ 的极限)，则光束的焦平面就会趋向于几何光学的焦平面位置，即(18)式会简化为(17)式。上述的这一性质也正好说明了光流体模型理论把光束运动区分为轨道运动和内禀运动的正确性。

2) 本文采用光束焦平面(光腰面)对几何光学焦平面的偏差来作为焦移量的定义。这与以前的焦移量定义相比，在本质上是用“焦平面”的概念来代替“焦点”的概念，因而更能从光束的整体特性上来反映光束的聚焦性质。当然，对于高斯光束来说，这两种定义是相同的，因为高斯光束在传输过程中，其在所有横截面上的光强分布都仍然是高斯分布，这一性质说明了高斯光束的轴上光强最大值点一定会落在光束的焦平面(光腰面)上，故这两种定义对于高斯光束来说是完全一致的。

3) 由(15)式可知，内禀能量 E_i 恒大于 0，故由(2)式可得：Δz_0 也恒为正数。这就意味着，光束的焦平面(腰面)总是相对于几何光学焦平面向参考平面这一侧偏移。所以当一不均匀振幅平面波被透镜聚焦时，光束的焦平面位置总是向透镜这一侧偏移。

4) 本文所定义的等效费涅耳数是对任意振幅分布会聚球面波而定义的，因而具有较普遍的意义。例如当 ϕ_0 为高斯型分布函数时，即取 ϕ_0 为

$$\phi_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \tag{24}$$

则可得到高斯光束的等效费涅耳数为

$$F_{\rm eff}=\frac{\sigma^2}{\lambda R} \tag{25}$$

它与文献[3]中高斯光束的等效费涅耳数是一致的，其区别仅在于相差一个常数因子 2，这是因为本文为了与大多数文献中的高斯光束的表达式取得一致，而进行了更为方便的选取。在 $E_iR^2/W^2\ll 1$ 的情况下，可以证明，高斯光束的相对焦移量(3)式与文献[3]中的(18)式也是完全相同的。由此可见，以前的关于高斯光束的焦移量公式只是作为一个特例情况而包含在本文的焦移量公式之中的。

5) 需要指出的是，本文所得到的会聚球面波的焦移量公式是在傍轴近似条件下得到的，它只能适用于傍轴光束，而不能适用于非傍轴光束。对于非傍轴光束来说，由于光束的衍射线(时间平均能流线)并不都平行于(或近似平行于) z 轴，这导致了横截面上的光强并不等同于振幅 ϕ_0 的平方，而是还要乘上一个倾斜因子($\partial L/\partial z$)，即 $I=\phi_0^2(\partial L/\partial z)$[13]。与这个修正后的光强表达式相一致，还需要对非傍轴光束的光斑半径(用光强二阶矩表示)及其传播规律进行修正。

参 考 文 献

[1] Y. Li, E. Wolf., Focal shifts in diffracted converging spherical waves. *Opt. Commun.*, 1981, **39**(4): 211～215

[2] Y. Li, E. Wolf, Focal shifts in focused truncated gaussian beams. *Opt. Commun.*, 1982, **42**(3): 151～156

[3] W. H. Carter, Focal shift and concept of erffective fresnel number for a gaussian laser beam. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(11): 1989～1994

[4] G. D. Sucha, W. H. Carter, Focal shift for a gaussian beam; an experimental study. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(23): 4345～4347

[5] M. P. Givens, Focal shifts in diffracted converging spherical waves. *Opt. Commun.*, 1982, **41**(3): 145～

[6] V. N. Mahajan, Axial irradiance and optimum focusing of laser beams. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(19): 3042～

[7] Y. Li, Accurate approximation of the focal shift in the transformation of truncated gaussian beams. *Opt. Eng.*, 1993, **32**(4): 774～780

[8] A. Yoshida, T. Asakura, Focusing a gaussian laser beam without focal shift. *Opt. Commun.*, 1994, **109**(3): 368～374

[9] 邓锡铭, *有限束宽光动力学*. 杭州, 杭州大学出版社, 1993年3月

[10] 邓锡铭, 丁丽明, 叶陈春, ABCD定理的推广. *中国激光*, 1990, **17**(5): 257～264

[11] A. E. Siegman, New developments in laser resonators. *Proc. SPIE, Optical Resonators*, 1990, **1224**(): 2～20

[12] P. A. Belanger, Beam propagation and the ABCD ray matrices. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(4): 196～198

[13] 曹 清, 邓锡铭, 郭 弘, 横截面上光强的精确表述. *光学学报*, 1996, **16**(7): 897～902

Focal Shifts of Converging Spherical Waves with Non-Uniform Amplitude I. Paraxial Light Beams

Cao Qing Deng Ximing Guo Hong

(*National Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sicences, Shanghai* 201800)

(Received 6 October 1995; revised 4 January 1996)

Abstract In this paper the focal shifts of paraxial converging spherical waves with non-uniform amplitude are analysed, and the analytical expression of the focal shifts is derived. Based on the theory of hydrodynamics model of optics (HMO), it is pointed out that the focal shifts are attributed to the intrinsic movements of the light beams.

Key words focal shift, coverging spherical wave, hydrodynamics model of optics.