

# 非旋波近似下双光子 Jaynes-Cummings 模型中 光子反聚束效应的研究

谢瑞华

(南京大学物理系, 南京 210008)

刘敦桓

(武汉大学物理系, 武汉 430072)

**摘 要** 利用弱场-弱耦合-短时近似, 研究了旋波近似与非旋波近似下双光子 Jaynes-Cummings 模型(JCM)中光子的反聚束效应, 分析了虚光子过程对此效应的影响。

**关键词** 光子反聚束效应, 相干光场, 双光子 Jaynes-Cummings 模型。

## 1 引 言

在量子光学和激光领域中, J-C 模型<sup>[1]</sup>是描述原子与辐射场相互作用的最简单和最典型的模型。它预言了许多有趣的非经典现象<sup>[2]</sup>。非旋波近似下 J-C 模型未能精确求解。近年来, 人们对它的兴趣一直未减。研究表明, 非旋波项确保原子与场作用系统的因果性<sup>[3]</sup>及使光场频率发生飘移<sup>[4]</sup>; 即使在旋波近似条件有效情况下, 虚光场效应对原子反转<sup>[5]</sup>, 场 Q 函数<sup>[6]</sup>, 光场压缩<sup>[7, 8]</sup>和原子压缩<sup>[9]</sup>的影响不可忽视。可见, 研究非旋波的近似下 J-C 模型的一些量子特性具有其一定的理论和实际意义。

经典光场光子间呈现聚束效应, 而光子的反聚束效应展示了辐射场的一种特殊的量子特性, 即光子在时域中倾向于均匀分离的一种趋势。因此, 人们对各种场模的聚束和反聚束效应进行了大量的理论和实验研究<sup>[10, 12]</sup>, 近年来, 由于单原子支持的双光子微波激光器在高 Q 微波腔中已实现了运转<sup>[13]</sup>, 这样, 在实验中观察双光子 J-C 模型中光子反聚束效应已成为可能。因而, 探讨虚光子过程对光子反聚束效应的影响也显得很有必要。本文利用弱场-弱耦合-短时近似, 具体研究非旋波近似下双光子 J-C 模型中光子的反聚束效应。

## 2 理论处理

考虑一个具有相同宇称的两能级原子通过双光子跃迁与一单模辐射场相互耦合的系统, 不计及热库作用, 其哈密顿可表述为

$$H = \Omega a^+ a + \omega S_z + G(a S_+ + a^+ S_-) + \lambda G(a S_- + a^+ S_+), \quad (1)$$

式中  $S_z$  和  $S_{\pm}$  分别为原子反转和跃迁算符,  $\omega$  是原子跃迁频率;  $a^+$  和  $a$  分别为场模产生与消灭算符, 而  $\Omega$  为场模频率。  $G$  是场-原子作用常数。当  $\lambda = 0$ , 此为旋波近似下双光子 J-C 模型; 而  $\lambda = 1$ , 则为非旋波近似下双光子 J-C 模型。本文使用单位  $\hbar = c = 1$ 。在求解时, 为简单起见, 仅考虑共振情况 ( $\omega = 2\Omega$ )。

对此系统的时间演化算符  $U(t) = \exp(-iHt)$  作弱场-弱耦合-短时近似<sup>[14]</sup>, 即

$$U(t) = \exp(-iHt) \approx \exp(-iH_1t) + \exp(-iH_2t) - \exp(-iH_3t) \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \Omega a^+ a + \omega S_z + G(a^+ S_- + a S_-) \\ H_2 &= -\Omega a^+ a + \omega S_z + \lambda G(a^+ S_+ + a S_-), \quad H_3 = \Omega a^- a - \omega S_z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上述哈密顿均可精确解出, 其中,  $H_1$  和  $H_2$  可分别理解为此两能级原子与实光场和虚光场相互作用过程。用  $|-\rangle$  和  $|+\rangle$  分别表示原子基态和激发态, 利用文献[15]中的方法, 求得时间演化算符  $U(t)$ :

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{+-} & U_{--} \\ U_{-+} & U_{--} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{++} &= \exp[-i(a^+ a + 1/2)\Omega t] [\cos(At) - 1] + \exp[-i(-a^+ a + 1/2)\Omega t] \cos(Ct) \\ U_{--} &= \exp[-i(a^+ a - 1/2)\Omega t] \cos(Bt) + \exp[i(a^+ a + 1/2)\Omega t] [\cos(Dt) - 1] \\ U_{--} &= -iG \exp[-i(a^+ a + 1)\Omega t] a \sin(Bt)/B \\ &\quad - i\lambda G \exp[-i(-a^+ a + 1/2)\Omega t] a^+ \sin(Dt)/D \\ U_{-+} &= -G \exp[-i(a^+ a - 1)\Omega t] a^+ \sin(At)/A \\ &\quad - i\lambda G \exp[i(a^+ a + 1/2)\Omega t] a \sin(Ct)/C \\ A &= G \sqrt{aa^+}, \quad B = G \sqrt{a^+ a}, \quad C = \lambda G \sqrt{a^+ a}, \quad D = \lambda G \sqrt{aa^+}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

当  $\lambda = 0$ , (4) 式与文献[15]的结果一致。如果系统初态  $|\psi(t=0)\rangle$  给定, 则可观察量  $\eta$  在  $t$  时刻的期望值可由下式求得

$$\langle \eta \rangle = \langle \psi(t) | \eta | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | U^+(t) \eta U(t) | \psi(0) \rangle \quad (6)$$

本文假定在初始时刻, 原子置于基态而光场处于相干态, 即

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |-, n\rangle, \quad (7)$$

其中,  $f_n = \exp(-\bar{n}/2) \sqrt{\bar{n}^n/n!} \exp(in\phi)$ ,  $\bar{n}$  表示初始平均光子数, 而  $\phi$  是光场初始位相(本文数值计算时取  $\phi = 0$ )。

腔场光子延迟二阶相关函数  $G^{(2)}(0)$  可表示为

$$G^{(2)}(0) = \frac{\langle a^+ a^+ a a \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2} \quad (8)$$

为方便, 定义如下的函数

$$g^{(2)}(0) = G^{(2)}(0) - 1 \quad (9)$$

如果  $g^{(2)}(0) > 0$ , 光子间为正关联, 它们是聚束的, 光场呈现经典态;  $g^{(2)}(0) = 0$ , 光子间无关联, 为相干光场;  $g^{(2)}(0) < 0$ , 光子间为负关联, 它们是反聚束的, 光场呈现非经典态。

利用(6)式, 求得  $\langle a^+ a \rangle$  和  $\langle a^+ a^+ a a \rangle$  如下

$$\langle a^+ a \rangle = \{\bar{n} - 1 + \exp(-\bar{n}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \cos(2G \sqrt{n(n-1)}t)\}$$

$$\begin{aligned}
& + \{2\bar{n} + 1 - \exp(-\bar{n}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} [\cos(2\lambda G \sqrt{(n+2)(n+1)t}) \\
& + 2n \cos(\lambda G \sqrt{(n+2)(n+1)t})]\} + \{\exp(-\bar{n}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \left[ \frac{2n!n}{\sqrt{(n+2)(n-2)!}} \right. \\
& \times \sin(G \sqrt{(n+2)(n+1)t}) \sin(\lambda G \sqrt{n(n-1)t}) \cos(4\phi - 4\Omega t) \\
& \left. + 2n (\cos(\lambda G \sqrt{(n+2)(n+1)t}) - 1) \cos(G \sqrt{n(n-1)t}) \cos(2\Omega nt) \right]\} \quad (10) \\
\langle a^{+2}a^2 \rangle = & (\bar{n}^2 - 2\bar{n} + 3 + \exp(-\bar{n}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} (2n-3) \cos(2G \sqrt{n(n-1)t}) \} \\
& + \{2\bar{n}^2 + 2\bar{n} + 1 - \exp(-\bar{n}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} [(2n+1) \cos(2\lambda G \sqrt{(n+2)(n+1)t}) \\
& + 2n(n-1) \cos(\lambda G \sqrt{(n+2)(n+1)t})]\} \\
& + \{\exp(-\bar{n}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \left[ \frac{2n!n(n-1)}{\sqrt{(n+2)!(n-2)!}} \sin(G \sqrt{(n+2)(n+1)t}) \right. \\
& \times \sin(\lambda G \sqrt{n(n-1)t}) \cos(4\phi - 4\Omega t) \\
& + 2n(n-1) (\cos(\lambda G \sqrt{(n+2)(n+1)t}) - 1) \\
& \left. \times \cos(G \sqrt{n(n-1)t}) \cos(2\Omega nt) \right]\} \quad (11)
\end{aligned}$$

代入(9)式,即可研究光子的反聚束效应。

### 3 结果与讨论

在(10)式、(11)式中,第一和第二大括号项分别体现旋波项和非旋波项的贡献,而第三大括号项则体现了旋波项和非旋波项间相互干涉作用,也即实光子过程和虚光子过程间相互干涉作用。由此结果可见,在旋波近似下,腔场光子延迟二阶相关函数  $G^{(2)}(0)$  与光场初始位相  $\phi$  及光场的频率  $\Omega$  无关,然而,虚光子过程的参与导致  $G^{(2)}(0)$  与  $\phi$  和  $\Omega$  有关,即  $\phi$  使  $G^{(2)}(0)$  有  $\pi/2$  的周期,而  $\Omega$  影响  $G^{(2)}(0)$  的振荡周期。

现利用数值计算来分析光子的反聚束效应。为考察虚光子过程对它的影响,本文对旋波近似和非旋波近似下的结果进行了比较。

在短时区,图 1 显示了  $g^{(2)}(0)$  与光场的频率  $\Omega$ ,光场的初始平均光子数  $\bar{n}$  和原子-光场耦合强度  $G$  的关系。从中可见,非旋波近似下光子的反聚束程度变深,而持续时间缩短。旋波近似下光子本是负关联,反聚束的,光场呈现非经典态。而在非旋波近似下,在某些时间区域内,光子是正关联,聚束的,光场呈现经典态。显然,导致这些结果的根源在于实光子过程和虚光子过程间的相互干涉作用。

将图 1(b)和图 1(c)分别与图 1(a)比较,可以看到,随着  $G$  或  $\bar{n}$  的增大,旋波近似和非旋波近似下的反聚束程度均变深,但非旋波近似下反聚束幅度变化更为明显。另外,这些图还显示,在这短时区域内,每次反聚束的持续时间并不随原子-光场耦合强度  $G$  或光场的初始平均光子数  $\bar{n}$  的变化而变化。

另外,将图 1(d)和图 1(a)比较可看出,随着光场的频率  $\Omega$  的增大,非旋波近似下的反聚束幅度减小,且每次反聚束的持续时间和  $g^{(2)}(0)$  的振荡周期缩短。而旋波近似下的这些量不随  $\Omega$  的变化而变化。

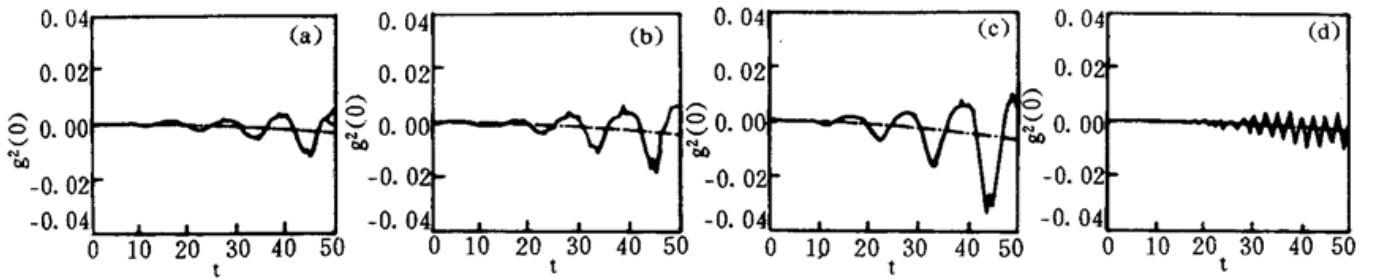


Fig. 1 Time evolution of  $g^{(2)}(0)$

(a)  $\Omega = 1$ ,  $\bar{n} = 3$ ,  $G = 10^{-4}$ ; (b)  $\Omega = 1$ ,  $\bar{n} = 3$ ,  $G = 5 \times 10^{-4}$ ; (c)  $\Omega = 1$ ,  $\bar{n} = 5$ ,  $G = 10^{-4}$ ; (d)  $\Omega = 2$ ,  $\bar{n} = 3$ ,  $G = 10^{-4}$ . where dot-dashed line denotes the RWA result

可见考虑虚光子过程后,光子的反聚束效应不仅依赖于光场的初始平均光子数  $\bar{n}$  和原子-光场耦合强度  $G$ ,而且还依赖于光场的频率  $\Omega$  的光场的初始位相  $\phi$ 。

在弱场的近共振情况下,光场与原子耦合不强时旋波近似适用<sup>[16]</sup>。由本文分析可见,即使在这些情况下,实光子过程和虚光子过程间的相互干涉作用对旋波近似下预言的光子反聚束效应的影响仍然很显著。况且,在实际的微波腔系统中,耦合强度  $G$  达到  $10^{-6}$  的量级<sup>[17]</sup>。故本文研究不仅有其理论意义,而且对实验观察光子反聚束效应有一定的参考作用。

对单模腔场,光子的反聚束效应和光子的亚泊松分布<sup>[10, 18, 19]</sup>等价。因此,本文的结论和讨论对单模腔场下的光子亚泊松分布也适应。

## 参 考 文 献

- [1] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 1963, **51**(1): 89~110
- [2] B. W. Shore, P. L. Knight, The Jaynes-Cummings model. *J. Mod. Opt.*, 1993, **40**(7): 1195~1238
- [3] G. Compagno, et al., Virtual-photon field, causal photon absorption and photodetectors. *Euro. Phys. Lett.*, 1989, **9**(3): 215~220
- [4] 李高翔, 彭金生, 旋波近似和非旋波近似下 Jaynes-Cummings 模型中光场位相涨落. *物理学报*, 1992, **41**(5): 766~772
- [5] 彭金生, 李高翔, 虚光场在原子的周期衰变和回复效应中的影响. *物理学报*, 1991, **40**(7): 1042~1048
- [6] S. J. D. Phoenix, The effect of the counter-rotating wave terms on the field Q-function in the JCM. *J. Mod. Opt.*, 1991, **38**(4): 695~705
- [7] P. Lais, T. Steimle, Squeezing in the Jaynes-Cummings model without the RWA. *Opt. Commun.*, 1990, **78**(5, 6): 346~350
- [8] 彭金生, 李高翔, 虚光子过程对光场压缩的影响. *物理学报*, 1993, **42**(4): 568~574
- [9] R. H. Xie, D. H. Liu, G. O. Xu, Dipole squeezing in the multi-photon Jaynes-Cummings model with and without the RWA. *Z. Phys. B*, 1996, **99**(2): 253~260
- [10] H. Paul, Photon antibunching. *Rev. Mod. Phys.*, 1982, **54**: 1061~1102
- [11] 吴 强, 郭光灿, 多原子体系与单模光场的多光子作用. *光学学报*, 1994, **14**(5): 469~474  
刘惠恩, 方卯发, 贾兆平, 类克尔媒质中多光子 J-C 模型场的反聚束效应. *光学学报*, 1994, **14**(7): 709~713
- [12] K. Zaheer, M. S. Zubairy, Photon statistics in Jaynes-Cummings model without the rotating-wave approximation. *Opt. Commun.*, 1989, **73**(4): 325~330
- [13] M. Brune, J. N. Raimond, S. Haroche, Theory of the Rydberg-atom two-photon micromaser. *Phys. Rev. A.*, 1987, **35**(1): 154~163
- [14] R. H. Xie, G. O. Xu, D. H. Liu, Study of some properties of two-level atoms in quantum optics. *Commun.*

*Theor. Phys.*, 1996, **25**(1): 61~70

- [15] 周 鹏, 彭金生, 多光子 Jaynes-Cummings 模型的演化. 光学学报, 1990, **10**(9): 837~844
- [16] M. Tavis, F. W. Cummings, Exact solution for an N-Molecule-radiation-field Hamiltonian. *Phys. Rev.*, 1968, **170**(2): 379~384
- [17] G. Rempe, H. Walther, N. Klein, Observation of quantum collapse and revival in one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(4): 353~356
- [18] 王育竹等, *Laser Spectroscopy VII*, Proceedings of the Seventh International Conference. Maui, HI, USA; June, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1985: 24~28
- [19] G. Rempe, F. Schmidt-kaler, H. Walther, Observation of sub-poissonian photon statistics in a micromaser. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(23): 2783~2736

## Photon Antibunching in the Two-Photon Jaynes-Cummings Model without the RWA

Xie Ruihua

(Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210008)

Liu Dunhuan

(Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072)

(Received 3 September 1994; revised 12 July 1995)

**Abstract** Using the approximation of weak field, weak atom-field coupling and short-time, we have studied the effect of photon antibunching in the two-photon Jaynes-Cummings model (JCM) with and without the rotating-wave approximation (RWA). The influence of virtual-photon processes on photon antibunching predicted in the JCM has been discussed.

**Key words** photon antibunching, coherent field, two-photon Jaynes-Cummings model.