

# 强激光和稠密等离子体相互作用 产生的三次谐波

沈百飞 余 玮 曾贵华 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

**摘 要** 研究了超强激光和均匀及线性梯度高密度等离子体相互作用产生的三次谐波, 特别研究了等离子体密度为四倍临界密度时的情形, 这可能是用相对论效应产生高次谐波的最佳密度。

**关键词** 高次谐波, 超强激光, 等离子体。

## 1 引 言

由于激光技术的发展, 强激光和等离子体相互作用变得具有实际意义<sup>[1]</sup>。现在用于激光等离子体相互作用实验的激光强度已达到  $I\lambda > 10^{18} \text{ W} \cdot \mu\text{m}^2/\text{cm}^2$ , 这里  $I$  为光强, 波长  $\lambda$  的单位是微米。电子在这样强的光强中的运动是强相对论的, 从而使得波动方程为非线性, 从而引起许多新的效应, 如激光束的相对论性波导<sup>[2]</sup>, 大尺度尾波场的产生<sup>[3]</sup>, 等离子体波造成激光脉冲压缩和基频的偏移, 以及本文讨论的相干高次谐波。激光和等离子体相互作用产生的高次谐波主要有下面几种, 一种是共振吸收诱发产生的谐波<sup>[4]</sup>。另一种是有质动力造成  $2\omega$  的静电振荡, 从而产生奇次谐波。还有则是由相对论性导致的奇次谐波, 由 Sprangle 等提出, Esarey、Rax 等又进行了进一步的研究。在相对论效应产生的谐波中, 有质动力也起着重要作用<sup>[5~9]</sup>。

## 2 物理模型

为了理解由相对论效应产生的高次谐波, 本文先考虑一个振荡模型, 即只考虑电子的相对论性振荡, 而不包括等离子体电子密度的响应。假定激光场线偏振  $a_0(z, t) = a_0 \cos \theta$ , 等离子体的横向电流为  $J = -en_0v_q$ , 这里  $v_q$  为电子的相对论性振荡速度,  $n_0$  为等离子体密度,  $J$  在波动方程中是驱动谐波的原项。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) a = S_q \quad (1)$$

$$S_q = k_p^2 a_0 \cos \theta (1 + a_0 \cos^2 \theta)^{-1/2} \quad (2)$$

$\omega_p = ck_p = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$  为等离子体频率, 在弱相对论近似下上式可以展开, 从而可以得到各阶谐波分量。事实上激光场的有质动力将造成等离子体电子密度  $2\omega$  扰动, 这样源项变为

$$S = k_p^2 a_0 (1 + \delta n/n_0 - a_0^2/2) \tag{3}$$

利用一维流体方程,可计算得到  $\delta n$ , 从而得到<sup>[6]</sup>

$$S = k_p^2 a_0 \cos \theta (1 - \frac{a_0^2}{4} - \frac{3}{16} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} a_0^2 \cos 2\theta) \tag{4}$$

因此密度响应减弱了相对论效应引起的三次谐波。由此得到的三次谐波转换效率为<sup>[8]</sup>

$$\frac{P_3}{P_1} = (\frac{9}{256})^2 \frac{a_1^4}{(1 + a_1^2/2)^3} \frac{\omega_p^4}{\omega_0^4} \tag{5}$$

作者曾在不作弱相对论和低密度近似的情况下进行研究,得到谐波转换效率为<sup>[9]</sup>

$$\frac{|a_3|_{max}}{a_1} = \frac{3a_1^2}{32(1 + a_1^2/2)} \frac{k_p^2}{4k_0^2(1 + a_1^2/2)^{1/2} - k_p^2} \tag{6}$$

那么,当电子密度高于临界密度时,又是怎样的情况?一方面和低于临界密度时一样相对论效应和电子密度  $2\omega$  响应共同作用将产生三次谐波,另一方面由于驱动激光场迅速衰减,从而产生沿激光传播方向的有质动力,并由此产生  $0\omega$  的密度扰动,这将产生一些新的现象。

### 3 数学描述

考虑一激光场  $E_{yi} = E_i \sin(kx - \omega_0 t)$  从左侧入射到一高密度等离子体界面上(如图 1 所示),等离子体内外的光场可以表示为

$$E_{yi} = E_i \sin(kx - \omega_0 t), \quad E_{yr} = E_r \sin(kx + \omega_0 + \varphi_1), \quad E_{yt} = E_t \sin(-\omega_0 t + \varphi_2) f(x) \tag{7}$$

由边界条件可以得到

$$r = E_r/E_i = 1, \quad t = E_t/E_i = 2/[1 + (c^2/\omega_0^2)(\partial f/\partial x)_0^2]^{1/2} \tag{8}$$

这里,  $(\partial f/\partial x)_0 = \partial f/\partial x|_{x=0}$ 。由此可得

$$a_{yt} = \frac{2a_i f(x)}{[1 + (c^2/\omega_0^2)(\partial f/\partial x)_0^2]^{1/2}} \cos(-\omega_0 t + \varphi_2) \tag{9}$$

现用下面这套方程描述超强激光和等离子体的相互作用,

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})a = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{n}{n_0} \frac{a}{\gamma}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} (\frac{n}{n_0} - 1), \tag{10}$$

$$\frac{\partial(\beta\gamma)}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \gamma) + i\beta\gamma v, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}(n\beta) = 0, \tag{11}$$

在(11)式中加入了碰撞项,这是为了研究四倍临界密度的情形。另外

$$n = n_0 + \delta n(0) + \delta n(2) \cos(2\omega_0 t + \theta), \quad \beta = \beta_2 \sin(2\omega_0 t + \theta), \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_2 \cos(2\omega_0 t + \theta) \tag{12}$$

为了按不同频率进行讨论,先把相对论因子  $\gamma$  展开

$$\begin{aligned} \gamma &= (1 + a_{yt}^2)^{1/2} = [1 + a_i^2/2 + (a_i^2/2) \cos 2\theta]^{1/2} \\ &= (1 + a_i^2/2)^{1/2} [1 + (a_i^2/4)(1 + a_i^2/2)^{-1} \cos 2\theta] = \gamma_0 + (a_i^2/4\gamma_0) \cos 2\theta \end{aligned} \tag{13}$$

这种展开,即使  $a_i \gg 1$ ,对  $0\omega, 2\omega$  分量的误差小于  $1/16$ 。下面将分均匀等离子体密度和线性等离子体密度梯度两种情况进行讨论。

#### 3.1 均匀等离子体密度(如图 1 所示)

现在研究电子密度的扰动,对于  $0\omega$  扰动,等离子体处于稳定状态,由运动方程(11),  $\partial p_0/\partial x = \partial \gamma_0/\partial x$ , 运用泊松方程可得

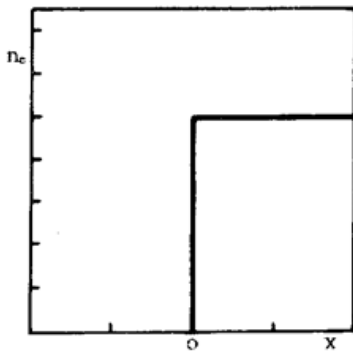


Fig. 1 Uniform density profile discussed in the text

$$\frac{\delta n(0)}{n_0} = \frac{c^2}{\omega_p^2} \frac{\mathcal{F}}{\partial x^2 \gamma_0} \quad (14)$$

对于  $2\omega$  扰动, 由连续性方程, 忽略  $\beta_2 \partial \delta n(0) / \partial x$  得

$$\frac{\delta n(2)}{n_0} = \frac{c}{2\omega} \frac{\partial}{\partial x} \beta_2 \quad (15)$$

由运动方程, 可得

$$(2\omega - i\nu) \beta_2 \gamma_0 = c \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_2 - \frac{a_i^2}{4\gamma_0} \right) \quad (16)$$

由(15)式、(16)式及泊松方程, 考虑弱相对论近似, 最终可得

$$\frac{\delta n(2)}{n_0} = \frac{c^2}{[(\omega_p^2 - 4\omega_0^2 \gamma_0)^2 + 4\omega_0^2 \gamma_0^2 \nu^2]^{1/2}} \frac{\mathcal{F}}{\partial x^2} \frac{a_i^2}{4\gamma_0} \quad (17)$$

可以看出, 由于加入碰撞项, 使得  $2\omega$  扰动在四倍临界界面处不再出现无穷大, 但这时仍有最大密度扰动, 因此将有最大谐波转换效率。为研究谐波辐射现在将波动方程展开, 可得

$$\left( \frac{\mathcal{F}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\mathcal{F}}{\partial x^2} \right) a_{yt} = \frac{\omega_p^2}{c^2 \gamma_0} a_{yt} \left( 1 - \frac{\delta n}{n_0} - \frac{1}{4} \frac{a_i^2}{\gamma_0^2} \cos 2\omega_0 t \right) \quad (18)$$

由方程左边, 得到  $3\omega$  的横向电流为

$$-\frac{4\pi}{c} j(3\omega) = \frac{mc^2}{e} \frac{\omega_p^2 a_i}{2c^2 \gamma_0} \left\{ \frac{c^2}{[(\omega_p^2 - 4\omega_0^2 \gamma_0)^2 + 4\omega_0^2 \gamma_0^2 \nu^2]^{1/2}} \frac{\mathcal{F}}{\partial x^2} \frac{a_i^2}{4\gamma_0} \sin \theta_1 - \frac{a_i^2}{4\gamma_0^2} \sin \theta_2 \right\} \quad (19)$$

当  $\omega_p \gg \omega_0$  时,  $f(x) = \exp(-\omega_p x/c)$ ; 且上式中两项位相相同, 可得到  $3\omega_0$  的电流源为(这里未考虑  $\gamma_0$  的变化)

$$\frac{4\pi}{c} j(3\omega) = \frac{mc^2}{e} \frac{\omega_p^2}{c^2} \left( \frac{3a_i^3}{8\gamma_0^3} \right) \cos(3\omega_0 t) \quad (20)$$

当  $\omega_p^2 = 4\omega_0^2 \gamma_0$  时, 两项相位差为  $\pi/2$ , 可得到  $3\omega_0$  的电流源为

$$-\frac{4\pi}{c} j(3\omega) = \frac{mc^2}{e} \frac{\omega_p^2 a_i}{2c^2 \gamma_0} \left[ \frac{c^2}{2\omega_0 \gamma_0 \nu} \frac{\mathcal{F}}{\partial x^2} \frac{a_i^2}{4\gamma_0} \sin(3\omega_0 t) - \frac{a_i^2}{4\gamma_0^2} \cos(3\omega_0 t) \right] \quad (21)$$

用格林函数可以得到三次谐波辐射的振幅。

$$A(x) = \frac{1}{c} \int J \frac{e^{ikr}}{r} d\tau \quad (22)$$

对一维情形, 当电流源尺度远小于激光波长时, 即  $l \ll \lambda$ ,

$$A = \frac{2\pi e^{ikl}}{ike} \int J dx \quad (23)$$

当  $\omega_p \gg \omega_0$  时, 将(20)式代入(23)式, 并利用(9)式, 可得

$$\frac{a_3}{a_i} = \frac{a_i^2}{6\gamma_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} \quad (24)$$

### 3.2 线性等离子体密度梯度

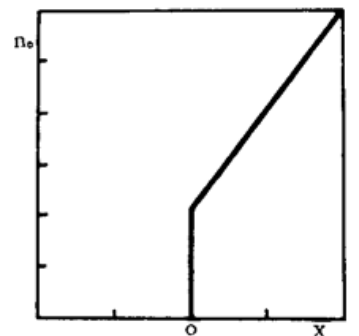
假设未扰动等离子体密度如图 2 所示,

$$n(x) = \frac{x}{l} n_c \quad (25)$$

$n_c$  为临界密度。与上面的讨论类似, 由连续性方程可得

$$2\omega_0 \delta n(2) = c \left( \frac{\partial}{\partial x} \beta_2 \right) \frac{x}{l} n_c + c \beta_2 \frac{n_c}{l} \quad (26)$$

解此方程, 有



(26) Fig. 2 Linear density profile discussed in the text

$$\beta_2 = \frac{1}{x} \left( \frac{2\omega_0}{c} l \int \frac{\delta n(2)}{n_c} dx + A \right) \quad (27)$$

$A$  为积分常数, 由运动方程可得

$$\begin{aligned} 2\omega\gamma_0 \left[ \frac{-1}{x^2} \left( \frac{2\omega_0}{c} l \int \frac{\delta n(2)}{n_c} dx + A \right) + \frac{1}{x} \frac{2\omega_0}{c} l \frac{\delta n(2)}{n_c} \right] \\ = c \frac{\omega_p^2}{c^2 n(x)} \delta n(2) - c \frac{\mathcal{F}^2 a_i^2}{\partial x^2 4\gamma_0} \end{aligned} \quad (28)$$

等式两边乘上  $x^2$ , 再求导解此方程可得

$$\begin{aligned} \frac{\delta n(2)}{n_c} = \frac{c^2 n}{n_c \omega_p^2} \frac{1}{(4\gamma_0 l - x)^2} \\ \left[ (4\gamma_0 l - x) x \frac{\mathcal{F}^2 a_i^2}{\partial x^2 4\gamma_0} + 4\gamma_0 l \frac{\partial a_i^2}{\partial x 4\gamma_0} + B \right] \end{aligned} \quad (29)$$

这里  $B$  为积分常数。现在可以写出  $3\omega$  的电流源

$$- \frac{4\pi}{c} j(3\omega) = \frac{mc^2 \omega_p^2 a_i}{e c^2 \gamma_0} \left[ \frac{\delta n(2)}{n_c} - \frac{a_i^2}{4\gamma_0^2} \right] \quad (30)$$

其中第一项为有质动力引起, 它在四倍临界密度处共振, 第二项为相对论效应引起。现在分别讨论这两项产生的电磁辐射。当  $lk_0 \ll 1$ , ( $k_0 = \omega/c$ ), 由于等离子体的屏蔽作用, 相对论效应引起的项可忽略。有质动力引起的电磁辐射为

$$a_{3p} = \frac{e^{i3k_0 L}}{i6k_0} \frac{1}{2\gamma_0} \int \frac{a_i^2 x}{l} \left[ \frac{x}{(4\gamma_0 l - x)} \frac{\mathcal{F}^2 a_i^2}{\partial x^2 4\gamma_0} + \frac{4\gamma_0 l}{(4\gamma_0 l - x)^2} \frac{\partial a_i^2}{\partial x 4\gamma_0} + \frac{B}{(4\gamma_0 l - x)^2} \right] dx \quad (31)$$

为得到积分, 令  $x = x - i\mu$ ,  $\mu \rightarrow 0^+$ 。如果在上面的推导中加入碰撞项, 只需在(29)式中, 将  $4\gamma_0 l$  换  $2(2 + i\nu/2\omega)$ 。这样也得到类似结果。利用残数定理, 可得到积分为

$$a_{3p} = \frac{8e^{i3k_0 L} \gamma_0 L}{3k_0} \left( a_i \frac{\mathcal{F}^2 a_i^2}{\partial x^2 4\gamma_0} \right) \Big|_{x=4\gamma_0 l} \quad (32)$$

## 4 讨 论

激光和固体靶相互作用可产生高次谐波。正入射时, 产生的为奇次谐波。当激光脉冲很短时, 由于等离子体来不及膨胀, 等离子体密度梯度很小, 甚至应使用台阶模型。从上面讨论可以看到, 当标尺长度很小时, 四倍临界密度的共振效应取决定作用。这里, 可以与斜入射激光在临界面附近共振吸收引起的谐波作一比较。对斜入射激光, 纵向场  $\sim a_i \cos \omega t$ ; 正入射时, 纵向场  $\sim a_i^2 \cos 2\omega t$  因此, 只有当激光具有相对论强度时, 才能和斜入射相比。另一方面, 正入射时, 共振点的电子密度较高, 因而产生较大的横向电流, 从而产生较强的谐波发射。同时由于只有奇次谐波, 转换效率也将有所提高。奇次谐波发射还可以用于强激光等离子体相互作用过程中, 四倍临界面运动的诊断。

## 参 考 文 献

- [1] P. Maine, D. Strickland, P. Bado *et al.*, Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1988, **QE-24**(2): 398~403
- [2] P. Sprangle, E. Esarey, A. Ting *et al.*, Laser wakefield acceleration and relativistic optical guiding. *Appl. Phys. Lett.*, 1988, **53**(22): 2146~2148
- [3] C. Clayton, K. Marsh, A. Dyson *et al.*, Ultrahigh-gradient acceleration of injected electrons by laser-excited relativistic electron plasma waves. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**(1): 37~40

- [4] C. Grebog, V. K. Tripathi, H. H. Chen, Harmonic generation of radiation in a step density profile. *Phys. Fluids*, 1983, **26**(7) : 1904~1908
- [5] P. Sprangle, E. Esarey, A. Ting, Nonlinear interaction of intense laser pulses in plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(17) : 2011~2014
- [6] J. M. Rax, N. J. Fish, Third harmonic generation with ultra-high intensity laser pulses. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **69**(5) : 772~775
- [7] E. Esarey, A. Ting, P. Sprangle *et al.*, Nonlinear analysis of relativistic harmonic generation by intense lasers in plasmas. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 1993, **21**(1) : 95~104
- [8] S. C. Wiks, W. L. Kruer, W. B. Mori, Odd harmonic generation of ultra-intense laser pulse reflected from an overdense plasma. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 1993, **21**(1) : 120~124
- [9] Baifei Shen, Wei Yu, Guihua Zeng *et al.*, Relativistic harmonic generation by intense laser in plasmas. *Phys. of Plasmas*, 1995, **2**(12) : 4631~4634

### Third Harmonic Generation by Interaction of Intense Laser with Overdense Plasma

Shen Baifei    Yu Wei    Zeng Guihua    Xu Zhizhan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 28 August 1995)

**Abstract** Third Harmonic generation by interaction of intense laser with overdense plasma is investigated for uniform plasma and linear density profile. The nonlinear resonance effect occurs at a density of four times critical density for normal incidence. Comparisons of the harmonic generation by normal and obliquely incident lasers are given.

**Key words** high order harmonic, intense laser, overdense plasma.