

非线性激光场中量子噪声之间的耦合效应

周晓萍 高伟建 朱士群

(苏州大学物理科学与技术学院, 苏州 215006)

摘 要 用二维气体激光模型对量子噪声的实部和虚部存在耦合的激光场进行了理论分析, 通过福克-普朗克方程导出了定态激光场强度和位相的分布函数, 算出了定态激光强度和位相的平均值, 方差和偏斜度。与量子噪声的两个分量为独立随机变量的激光场相比, 噪声间的耦合极大地改变了激光场强度和位相的涨落, 并引起了激光场强度与位相之间的耦合。

关键词 耦合效应, 量子噪声, 方差, 偏斜度。

1 引 言

对传统的二维单模激光场统计性质的理论分析和实验研究表明, 量子噪声对气体激光的涨落起着很大的作用^[1~3]。在已往的理论分析中, 激光场中量子噪声的实部和虚部往往是作为独立随机变量来处理的^[1~3], 然而在一定的条件下这两部分之间是可以存在相互耦合的^[4~6]。

本文从量子噪声的两部分存在耦合的激光场出发, 通过福克-普朗克方程导出了定态激光强度和位相的平均值, 方差以及偏斜度, 并与从量子噪声两部分是独立随机变量的激光场得到的相应结果进行了比较。

2 理论模型和公式推导

复振幅为 $E = E_1 + iE_2$ 的激光场运动方程可用非线性朗之万方程表示为:

$$dE/dt = a_0E - A|E|^2E + q(t) \quad (1)$$

式中 a_0 和 A 分别为净增益和自饱和系数, $q(t)$ 代表激光场中自发辐射引起的加性量子噪声, 其平均值为零。若 $q(t)$ 的实部和虚部存在耦合, 其相关函数可表示为:

$$\begin{aligned} \langle q_i(t)q_i(t') \rangle &= P\delta(t-t'), & (i=1, 2), \\ \langle q_i(t)q_j(t') \rangle &= \lambda P\delta(t-t'), & (i \neq j, i, j=1, 2). \end{aligned} \quad (2)$$

式中 P 为量子噪声的强度, λ ($-1 \leq \lambda \leq 1$) 为量子噪声实部与虚部之间的耦合强度。相应的约化概率密度 $\tilde{Q}(E, t)$ 满足福克-普朗克方程^[3~6]:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial E_i} \{ [a_0 - A(\sum_{i=1}^2 E_i^2)] E_i \tilde{Q} \} + \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} [\lambda P \tilde{Q}] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial E_i^2} [P \tilde{Q}] \quad (3)$$

在 $t \rightarrow \infty$ 的极限情形下, 激光系统趋于稳态。通过坐标变换 $E_1 = \sqrt{I} \cos \varphi$, $E_2 = \sqrt{I} \sin \varphi$, 以及 $Q = \tilde{Q} / \sqrt{I}$, 可得 Q 所满足的方程:

$$-\frac{\partial}{\partial I} [2(a_0 I - AI^2 + P)Q] + \frac{\partial}{\partial \varphi} [(\frac{\lambda P}{I} \cos 2\varphi)Q] + \frac{\partial^2}{\partial I^2} [2PI(1 + \lambda \sin 2\varphi)Q] + \frac{\partial^2}{\partial I \partial \varphi} [(2\lambda P \cos 2\varphi)Q] + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [\frac{P}{2I} (1 - \lambda \sin 2\varphi)Q] = 0 \quad (4)$$

式中 I 和 φ 分别为激光场的强度和位相。方程(4)的试探解可以写成^[7, 8]:

$$Q(I, \varphi) = N \exp [-U_1(\varphi)I - U_2(\varphi)I^2 - \dots - U_n(\varphi)I^n - \dots] = N \exp (-U) \quad (5)$$

式中 N 为归一化常数, U 满足: $U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\varphi)I^n$, 将方程(5)代入(4)式可得:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -\alpha f, \\ U_2 &= (2/3)\beta_1 f - (1/6)\beta_2 f^2, \\ U_3 &= -(1/24)\alpha\beta_1 f^2 + (1/24)\alpha\beta_2 f^3, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$f = 1 - \lambda \sin 2\varphi, \quad \alpha = \frac{a_0}{P(1 - \lambda^2)}, \quad \beta_1 = \frac{A}{P(1 - \lambda^2)}, \quad \beta_2 = \frac{A}{P(1 - \lambda^2)^2}. \quad (7)$$

利用公式

$$\langle I^m \sin^n \varphi \cos^l \varphi \rangle = \int_0^{\infty} dI \int_0^{2\pi} d\varphi I^m \sin^n \varphi \cos^l \varphi Q(I, \varphi), \quad (m, n, l = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

定态激光场强度和位相的平均值, 方差以及偏斜度可通过对(5)式进行相应的积分而得到:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{2I}(0) &= \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 - 1, & \lambda_{3I}(0) &= \langle I^3 \rangle / \langle I \rangle^3 - 3\lambda_{2I}(0) - 1, \\ \lambda_{2\varphi}(0) &= \langle \varphi^2 \rangle / \langle \varphi \rangle^2 - 1, & \lambda_{3\varphi}(0) &= \langle \varphi^3 \rangle / \langle \varphi \rangle^3 - 3\lambda_{2\varphi}(0) - 1, \\ \lambda_{2 \sin \varphi}(0) &= \langle \sin^2 \varphi \rangle - \langle \sin \varphi \rangle^2, & \lambda_{3 \sin \varphi}(0) &= \langle \sin^3 \varphi \rangle - 3\lambda_{2 \sin \varphi}(0) \langle \sin \varphi \rangle - \langle \sin \varphi \rangle^3, \\ \lambda_{2 \cos \varphi}(0) &= \langle \cos^2 \varphi \rangle - \langle \cos \varphi \rangle^2, & \lambda_{3 \cos \varphi}(0) &= \langle \cos^3 \varphi \rangle - 3\lambda_{2 \cos \varphi}(0) \langle \cos \varphi \rangle - \langle \cos \varphi \rangle^3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由于不能求出(9)式的解析式, 以上各量只能利用(8)式进行数值积分得到。

3 比 较

为了看出激光场中量子噪声的耦合作用, 就必须将上述结果与量子噪声间不存在耦合时 ($\lambda = 0$) 的激光场得到的相应结果进行比较, 其中参量 $A = 1$, $P = 2$ 。在量子噪声间不存在耦合时, 激光场强度和位相的平均值, 方差以及偏斜度为^[3]:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{2I}(0) &= P/A \langle I \rangle^2 + a_0/A \langle I \rangle - 1, & \lambda_{2\varphi}(0) &= 1/3, \\ \lambda_{3I}(0) &= a_0 P/A^2 \langle I \rangle^3 + [(a_0/A)^2 + 2P/A](1/\langle I \rangle^2) - 3\lambda_{2I}(0) - 1, \\ \lambda_{3\varphi}(0) &= \lambda_{3 \sin \varphi}(0) = \lambda_{3 \cos \varphi}(0) = 0, & \lambda_{2 \sin \varphi}(0) &= \lambda_{2 \cos \varphi}(0) = 1/2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中

$$\langle I \rangle = \frac{a_0}{A} + \left(\frac{2P}{A\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{\exp(-a_0^2/2PA)}{1 + \operatorname{erf}(a_0/\sqrt{2PA})} \right], \quad (11)$$

激光场的强度分布函数和位相无关，其表达式为^[3]：

$$Q(I) = \sqrt{\frac{2A}{P\pi}} \left\{ \frac{\exp[-A(I - a_0/A)^2/2P]}{1 + \operatorname{erf}(a_0/\sqrt{2PA})} \right\}. \tag{12}$$

直角坐标系中，激光场强度和位相分布函数 $Q(E_1, E_2)$ 随不同耦合强度 λ 和泵浦参量 a_0 变化的情形画在图 1(a)，图 1(b)，图 1(c)和图 1(d)中。当噪声间不存在耦合，即 $\lambda = 0$ 时，分布函数 $Q(E_1, E_2)$ 随泵浦参量 a_0 的变化由(12)式确定。显然， $Q(E_1, E_2)$ 与位相 φ 无关，图形呈旋转对称，对称轴为 Q 轴。由图 1(a)和图 1(b)可见，当 $a_0 < 0$ 时， Q 呈高斯分布，极大值位于 $E_1 = E_2 = 0$ 处。当 $a_0 > 0$ 时， Q 呈桶形分布，极大值位于桶的上边沿，而 $E_1 = E_2 = 0$ 处为 Q 的极小值。当噪声间存在耦合，即 $\lambda \neq 0$ 时，分布函数 $Q(E_1, E_2)$ 随泵浦参量 a_0 的变化由(5)式确定。显然， $Q(E_1, E_2)$ 受位相 φ 的调制， Q 不再是旋转对称图形。由图 1(c)和图 1(d)可见，当 $a_0 < 0$ 时，位相 φ 对 $Q(E_1, E_2)$ 的影响不大， Q 基本上还是旋转对称的高斯分布，极大值位于 $E_1 = E_2 = 0$ 处。当 $a_0 > 0$ 时， Q 的分布呈元宝形，除了对称分布的一对极大值外，还存在鞍点，而极小值则出现在 $E_1 = E_2 = 0$ 处。

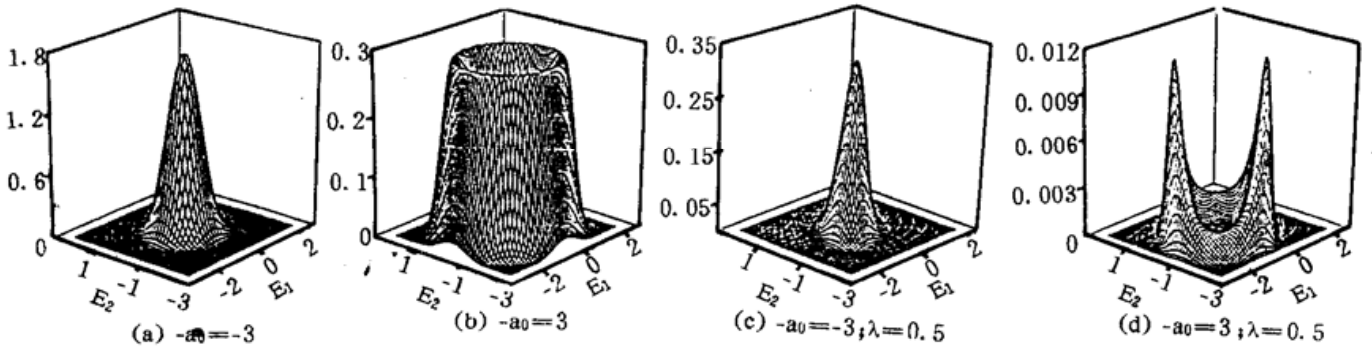


Fig. 1 The distribution function $Q(E_1, E_2)$ as a function of the two orthogonal laser field E_1 and E_2 for different pump parameter a_0 and coupling constant λ . (a) $a_0 = -3, \lambda = 0.0$; (b) $a_0 = 3, \lambda = 0.0$; (c) $a_0 = -3, \lambda = 0.5$; (d) $a_0 = 3, \lambda = 0.5$. When $\lambda = 0.0$ the curve is from Eq. (12), when $\lambda = 0.5$ the curve is from Eq. (5)

激光强度的归一化方差 $\lambda_{2I}(0)$ 和偏斜度 $\lambda_{3I}(0)$ 对于不同的耦合强度 λ 随泵浦参量 a_0 变化的情况画在图 2(a)和图 2(b)中。由图 2 可见，当激光场在低于阈值的情况下工作时， $\lambda_{2I}(0)$ 和 $\lambda_{3I}(0)$ 均随 a_0 变化不大，仅随着 λ 的增大而相应增大；当激光场在高于阈值的情况下工作时， $\lambda_{2I}(0)$ 和 $\lambda_{3I}(0)$ 随着 a_0 的增大而迅速趋近于 0，并且 λ 越大， $\lambda_{2I}(0)$ 和 $\lambda_{3I}(0)$ 趋近于 0 的速度越快。

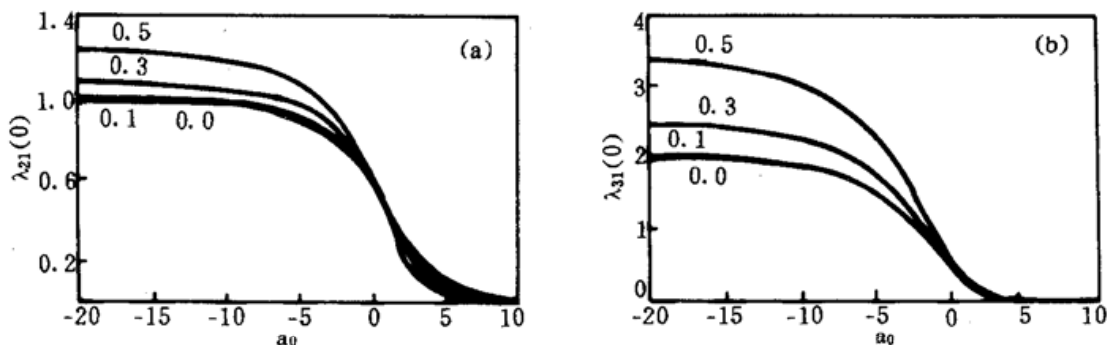


Fig. 2 The normalized variance $\lambda_{2I}(0)$ and skewness $\lambda_{3I}(0)$ of the laser intensity I as a function of the pump parameter a_0 for different values of coupling constant $\lambda = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5$. When $\lambda = 0$ the curve is from Eq. (10), when $\lambda \neq 0$ the curve is from Eq. (9)

激光场位相的归一化方差 $\lambda_{2\varphi}(0)$ 和偏斜度 $\lambda_{3\varphi}(0)$ 对于不同的耦合强度 λ 随泵浦参量 a_0 变化的情况画在图 3(a)和图 3(b)中。由图 3 可见，当 $\lambda = 0$ 时，激光场位相的涨落为一常数。在低于阈值的情况下， $\lambda_{2\varphi}(0)$ 随 λ 的提高而大幅度地提高；在高于阈值的情况下， $\lambda_{2\varphi}(0)$ 随 λ 的提高而大幅度地下降。最后，在远高于阈值的情况下，即使对 λ 取不同的值， $\lambda_{2\varphi}(0)$ 总是趋向一个常数。由图 3(b) 还可以看出一个重要的现象，位相偏斜度 $\lambda_{3\varphi}(0)$ 在低于阈值的情况下为正值，在高于阈值的情况下为负值； $\lambda_{3\varphi}(0)$ 在略高于阈值处出现波谷，波谷的位置随 λ 的增大向 a_0 减小的方向移动，当 a_0 进一步增大时，对于所有的 λ ， $\lambda_{3\varphi}(0)$ 均趋向于 0，但是 $\lambda_{3\varphi}(0)$ 趋向于 0 的速度随 λ 的增大而增大。另外， $\sin \varphi$ 和 $\cos \varphi$ 的方差以及偏斜度对所有的 a_0 以及 λ 均为常数，分别为 1/2 和 0。

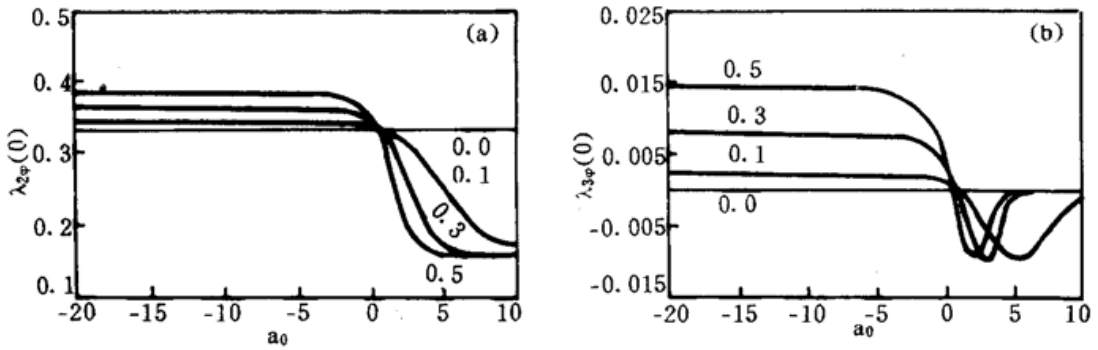


Fig. 3 The normalized variance $\lambda_{2\varphi}(0)$ and skewness $\lambda_{3\varphi}(0)$ of the phase φ of the laser field as a function of the pump parameter a_0 for different values of coupling constant $\lambda = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5$. When $\lambda = 0$ the curve is from Eq. (10), when $\lambda \neq 0$ the curve is from Eq. (9)

4 讨 论

定态激光场强度的平均值 $\langle I \rangle$ 对于不同的耦合强度 λ 随泵浦参量 a_0 变化的情况画在图 4 中。由图可见，在低于阈值的情况下， λ 的值对 $\langle I \rangle$ 基本上没什么影响，但在高于阈值的情况下， $\langle I \rangle$ 随着 λ 的增大而显著增大。交叉项 $\langle I \sin \varphi \cos \varphi \rangle / \langle I \rangle$ 对于不同的耦合强度 λ 随泵浦参量 a_0 变化的情况画在图 5 中。由图可见， $\langle I \sin \varphi \cos \varphi \rangle / \langle I \rangle$ 在低于阈值的情况下随 λ 的增大

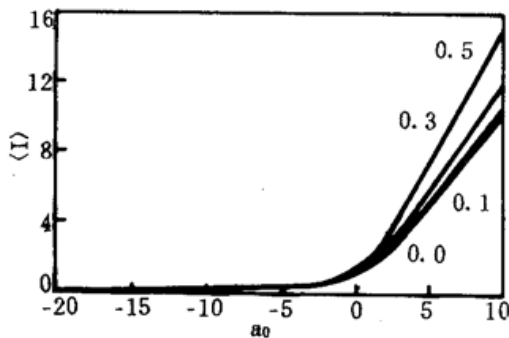


Fig. 4 The mean laser intensity $\langle I \rangle$ as a function of the pump parameter a_0 for different values of coupling constant $\lambda = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5$. When $\lambda = 0$ the curve is from Eq. (11), when $\lambda \neq 0$ the curve is from Eq. (8) and (5)

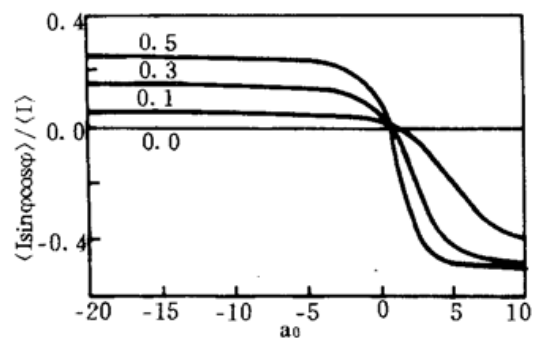


Fig. 5 The mean value of the cross product of the laser intensity and phase $\langle I \sin \varphi \cos \varphi \rangle / \langle I \rangle$ as a function of the pump parameter a_0 for different values of coupling constant $\lambda = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5$. When $\lambda = 0$ the curve is from Eq. (8) and (12), when $\lambda \neq 0$ the curve is from Eq. (8) and (5)

而增大, 在高于阈值的情况下随 λ 的增大而减小, 最后在远高于阈值的情况下, 对不同数值的 λ , $\langle I \sin \varphi \cos \varphi \rangle / \langle I \rangle$ 都趋向于一个常数。毫无疑问, 在负相关 ($\lambda < 0$) 的情况下, 以上结果与正相关 ($\lambda > 0$) 情形下得到的结果完全一致, 这一点可从 (5) ~ (7) 式看出。在这些方程中, λ 或者以与周期函数 $\sin 2\varphi$ 相乘的形式出现, 或者以 λ^2 的形式出现。

从以上的理论分析以及不同激光场理论模型 ($\lambda = 0$ 和 $\lambda \neq 0$) 的比较可以看出, 量子噪声实部与虚部之间的耦合在低于阈值的情况下增大了激光场强度与位相的涨落, 在高于阈值的情况下降低了激光场强度和位相的涨落。另外, 耦合的存在还引起了激光场强度和位相之间的耦合, 这是两种激光理论 ($\lambda = 0$ 和 $\lambda \neq 0$) 之间的重要区别所在。

衷心感谢陈玉华, 胡冶和汪谨对数值计算的热心帮助和建议。

参 考 文 献

- [1] H. Haken, *Laser Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1984
- [2] M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb, Jr., *Laser Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974
- [3] Shiqun Zhu, Saturation effect in a laser at steady state. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(7): 4996~4973
- [4] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, Berlin, 1984
- [5] A. Fulinski, T. Telejko, On the effect of interference of additive and multiplicative noises. *Phys. Lett. A*, 1991, **152**(1, 2): 11~14
- [6] Shiqun Zhu, Steady-state analysis of a single-mode laser with correlations between additive and multiplicative noise. *Phys. Rev. A*, 1993, **47**(3): 2405~2408
- [7] I. I. Fedchenia, Local methods for constructing stationary distribution functions of systems of stochastic differential Langevin-type equations; noise influence on simple bifurcation. *J. Stat. Phys.*, 1988, **50**(5/6): 1043~1068
- [8] I. I. Fedchenia, A two-dimensional Fokker-Planck equation degenerating on a straight line. *J. Stat. Phys.*, 1988, **52**(3/4): 1005~1029

Coupling Effect of Quantum Noise Terms in a Nonlinear Laser Field

Zhou Xiaoping Gao Weijian Zhu Shiqun

(*Institute of Science and Technology of Physics, Suzhou University, Suzhou 215006*)

(Received 22 June 1995)

Abstract The coupling effect of quantum noise terms in a nonlinear laser field is analysed theoretically with a two-dimensional gas laser model. The steady-state distribution function of the laser intensity and phase is derived through a Fokker-Planck equation. The mean, variance and skewness of the steady-state laser intensity and phase are calculated. Compared with the laser model of independent noise terms, the coupling of quantum noise terms changes the fluctuations of either intensity or phase drastically, it also introduces coupling fluctuation between the laser intensity and phase.

Key words coupling effect, additive noise, variance, skewness.