

# 双折射双频激光器频差特性分析

郭继华 神 帅 蒋建华

张书练

(清华大学现代应用物理系, 100084) (清华大学精密仪器和机械学系, 100084)

**摘 要** 用激光原理和晶体光学原理分析了腔内加旋光晶体时输出光的频差特性。分析表明: 当晶片旋转时, 理论计算的频差永远小于由晶体两本征模通过晶片位相差所决定的频差, 有一特殊因子  $G^2$  起作用。 $G^2$  的物理意义是激光本征模在晶体两本征模上的投影比的平方。这表明一个激光本征模在通过晶体时是部分以快模形式, 部分以慢模形式, 实际位相延迟介于两者之间。由于两者都介于快模和慢模之间, 因而实际频差小于由快模和慢模决定的频差。理论计算同实验符合得很好。从而解决了这一多年没有解决的问题。

**关键词** 频差特性, 旋光晶体, 激光器。

## 1 引 言

双折射双频激光器为高速双频激光干涉仪的研制提供了优质光源, 也为其他应用展示了广阔的前景。但是, 此激光器输出频差同晶片旋转角关系这一基本理论问题一直没有解决。这一方面是由于过去激光腔内加入晶片的理论都比较简单, 没有考虑旋光性, 而在这里石英的旋光性起非常大作用。另一方面由于实验结果对理论分析的提示也不够。作者对此激光器偏振特征进行了实验研究<sup>[1]</sup>并建立了较完整的激光腔内加入旋光晶体的理论<sup>[2]</sup>。本文给出用这一理论对频差问题的处理方法和结果。

## 2 实验现象及同简单理论分析的矛盾

双折射双频激光器是在普通He-Ne激光器腔内加入石英晶片, 晶面和光轴垂直。光的传播方向和光轴平行。当旋转晶片时, 可观察到两个频率的光, 它们都是线偏振的, 且偏振方向垂直, 其频差可以从 40 MHz 连续变到 417 MHz, 频差和转角的关系<sup>[3]</sup>如图 1 所示。

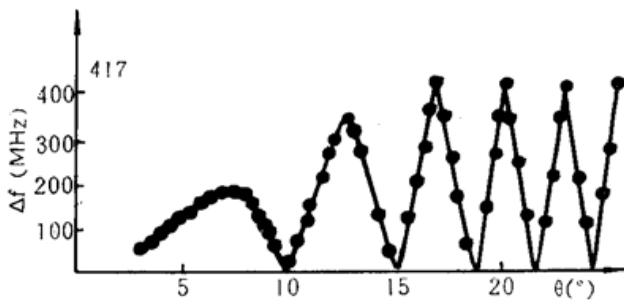


Fig. 1 Relation between frequency and rotating angle  $\theta$

当激光腔内的晶片没有旋光性时, 通常用 o 光和 e 光通过晶片的位相差来计算输出光的频差, 这一理论也取得了成功。

\* 国家自然科学基金资助。

收稿日期: 1995年5月14日; 收到修改稿日期: 1995年9月4日

但在这里遇到了麻烦, 它不能解释实验现象, 甚至不能定性地解释为什么第一个峰那样低。是否是因为在计算位相差时没有考虑旋光性呢? 图 2 给出考虑石英旋光性后晶体两个本征模通过晶片的位相差, 图 3 给出根据此位相差计算的频差。所用参数与后面新的理论一样。这明显与实验不符。所以必须寻求新的理论处理。

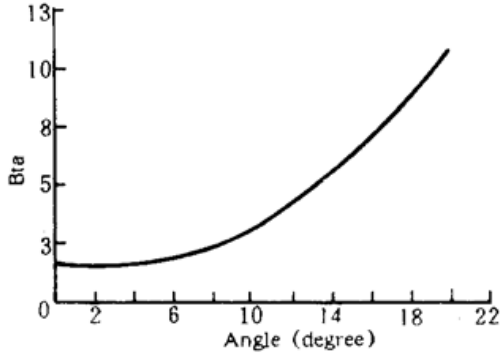


Fig. 2 Relation between phase difference  $\beta$  and rotating angle  $\theta$

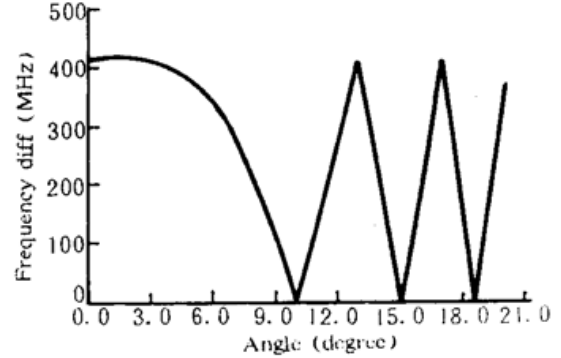


Fig. 3 Beat frequency determined by phase difference

### 3 激光腔内加旋光晶体基本理论

激光器产生激光要满足自洽理论, 即光在激光腔内来回一周应恢复到原来的状态。前文只考虑偏振状态, 这里还要考虑位相状态。光在晶体中传播应遵从晶体光学原理, 即应以晶体本征模的形式传播。但激光的本征模并不一定是晶体的本征模, 对此问题的处理是: 激光的本征模在通过晶体时分解成两个晶体的本征模。这一点同激光腔内加一非旋光晶体不同, 在那里激光器的本征模同晶体的本征模是一致的。

严格地按上述理论进行讨论是非常困难的, 本文在处理具体问题时作了如下近似: 当光在晶体界面折射时把晶体看作各向同性介质, 不考虑晶体反射和折射对偏振态的影响, 不考虑模式耦合的影响, 在必要的地方用模式耦合对实验现象作出解释。

已经用上述理论成功地处理了双折射双频激光器的偏振态问题, 理论计算和实验结果符合得很好。

### 4 双折射双频激光器输出频差理论分析

不考虑偏振态的归一化, 激光器的本征模可以用  $\begin{bmatrix} J \\ 1 \end{bmatrix}$  表示, 其中  $J$  为复数。光在晶体中传播, 两个晶体本征模可以用  $\begin{bmatrix} \cos \psi \\ i \sin \psi \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} \sin \psi \\ -i \cos \psi \end{bmatrix}$  表示, 其中  $\psi$  为实数。 $\psi$  同波矢  $k$  及晶体参数的关系可以从文献[4]中找到。激光本征模在入射到晶体时将分为

$$\begin{bmatrix} J \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos \psi \\ i \sin \psi \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \sin \psi \\ -i \cos \psi \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中  $a$ 、 $b$  为复数, 它们的值可以从  $J$  和  $\psi$  的值得到。如果两晶体本征模对应的折射率分别为  $n'$  和  $n''$ , 光在晶体中传播距离为  $l$ , 则两个本征模经过晶体产生的位相差

$$\beta = 2\pi l(n' - n'')/\lambda \quad (2)$$

该激光本征模通过晶片后的偏振态将为

$$a \begin{bmatrix} \cos \psi \\ i \sin \psi \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \sin \psi \\ -i \cos \psi \end{bmatrix} \exp(-i\beta)$$

在偏振态特性分析论文中, 本文已根据激光自洽原理得出: 对双模运转,  $\begin{bmatrix} J \\ 1 \end{bmatrix}$  本征模通过晶体后的偏振态为  $\begin{bmatrix} -J \\ 1 \end{bmatrix}$ 。但那里只考虑了偏振特性。这里还要考虑位相的延迟, 所以

$$a \begin{bmatrix} \cos \psi \\ i \sin \psi \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \sin \psi \\ -i \cos \psi \end{bmatrix} \exp(-i\beta) = \exp(-i\Delta) \begin{bmatrix} -J \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

根据(1)式和(3)式可以求出  $\Delta$

$$\operatorname{tg} \Delta = bb^* \sin \beta / (aa^* + bb^* \cos \beta) = \sin \beta / (p^2 + \cos \beta) \quad (4)$$

其中

$$p^2 = aa^* / bb^*$$

这样

$$\operatorname{tg} \Delta_1 = \sin \beta / (p_1^2 + \cos \beta), \quad \operatorname{tg} \Delta_2 = \sin \beta / (p_2^2 + \cos \beta) \quad (5)$$

$\Delta_1$  和  $\Delta_2$  分别对应两个激光本征模。从对激光偏振态的分析,  $J$  满足

$$J^2 - J / [\operatorname{tg}(\beta/2) \sin 2\psi] - 1 = 0 \quad (6)$$

由(6)和(3)可以得到:  $p_1^2 = 1/p_2^2$ , 因此

$$\operatorname{tg}(\Delta_1 - \Delta_2) = [(1 - p_1^4) \sin \beta] / [(1 + p_1^4) \cos \beta + 2p_1^2] \quad (7)$$

这样就可以利用晶体参数求得  $\psi$  和  $\beta$ , 利用方程(6)求得  $J$ , 利用(3)求得  $p_1^2$ , 根据(7)式计算  $(\Delta_1 - \Delta_2)$  的值, 另外, 如令  $p = (a/b) \exp(i\beta/2)$ , 可以求得  $p$  满足的方程

$$p^2 - 2p \operatorname{ctg} 2\psi \cos(\beta/2) - 1 = 0 \quad (8)$$

也可以不求  $J$ , 根据(8)式求得  $p_1$  和  $p_2$ 。

当激光腔内加入非旋光晶体时 输出频差为

$$\delta\nu = |\beta'| v_c / (\pi/2) \quad (9)$$

$$\begin{cases} \beta = n\pi + \beta', & n \text{ 取整数} \\ |\beta'| \leq \pi/2 \end{cases} \quad (10)$$

图 3 就是根据(9)和(10)经过计算得到的。当激光腔内加入旋光晶体时, 频差

$$\Delta\nu = |\Delta_1 - \Delta_2| v_c / (\pi/2) \quad (11)$$

考虑到角度  $\beta$  的有效范围, (7)式改写为

$$\operatorname{tg}(\Delta_1 - \Delta_2) = [(1 - p_1^4) \sin \beta'] / [(1 + p_1^4) \cos \beta' + 2p_1^2] \quad (12)$$

由于  $1/p_1^2$  和  $p_1^2$  给出同样的频差, 为讨论方便, 定义

$$G^2 = \begin{cases} p_1^2, & p_1^2 \leq 1 \\ 1/p_1^2, & p_1^2 > 1 \end{cases} \quad (13)$$

最后的形式为

$$\operatorname{tg}(\Delta_1 - \Delta_2) = \frac{(1 - G^4) \sin \beta'}{(1 + G^4) \cos \beta' + 2G^2} \quad (14)$$

由于实验曲线复杂, 理论是否符合实验还必须通过数值计算来验证。

## 5 数值计算

为了验证理论的正确性,作者进行了数值计算,对石英参数  $n_o$ 、 $n_e$  和  $\gamma_{33}$  的取值和计算偏振态时数值一样,即  $n_o = 1.54263$ ,  $n_e = 1.55169$ ,  $\gamma_{33} = 1.7892 \times 10^{-5}$ 。为了使频差零点和实验一致,晶片的厚度取 2.4 mm。因为两个实验所用激光器不同,所以  $d$  取值略有差别。最高频差  $\nu_e$  取 417 MHz。理论计算结果如图 4 所示。不难发现理论计算和实验符合得相当好。当理论计算频差很小时,实验为零是由于模式耦合引起的。这种不一致是预料之中的。

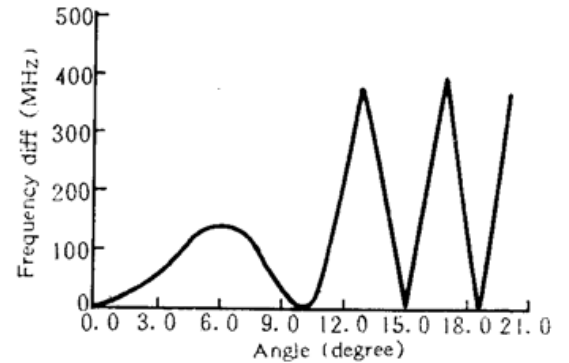


Fig. 4 Relation between beat frequency and rotating angle  $\theta$  (theoretical results)

## 6 关于 $G^2$ 的讨论

在旋光系数  $\gamma = 0$  时,考虑旋光性的理论,应同不考虑旋光性的结果相同:当  $\gamma = 0$  时,  $\psi = 0$ ,  $p = 0$  和  $\infty$ , 此时  $G^2 = 0$ , 所以(14)化简为

$$\text{tg} (\Delta_1 - \Delta_2) = \text{tg} \beta' \quad (15)$$

即

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \beta', \quad \Delta\nu = \delta\nu$$

所得结论相同。

当考虑旋光性时,如  $G^2 = 1$ , 则  $\text{tg} (\Delta_1 - \Delta_2)$  为零,  $\Delta\nu$  为零。这发生在  $\cos (\beta/2)$  为零的情况。这时  $\beta$  为  $(2n + 1)\pi$ , 对应  $\beta'$ ,  $\delta\nu$  也为零。对  $0 < G^2 < 1$  的情况, 由于

$$|\text{tg} (\Delta_1 - \Delta_2)| < |\text{tg} \beta'| \quad (16)$$

所以

$$|\Delta_1 - \Delta_2| < |\beta'|, \quad \Delta\nu < \delta\nu$$

(16)式说明实验频差小于由晶体本征模所决定的频差,这已为实验所证实。另外,可以很容易证明

$$\frac{\partial}{\partial G^2} |\text{tg} (\Delta_1 - \Delta_2)| \leq 0 \quad (17)$$

(17)式表明:当  $\beta'$  一定时,频差  $\Delta\nu$  随  $G^2$  的增大而减小。由于  $G^2 = 0$  时,  $\Delta\nu = \delta\nu$ ,  $0 < G^2 < 1$  时  $\Delta\nu < \delta\nu$ , 所以  $G^2$  的大小反映了频差  $\Delta\nu$  对  $\delta\nu$  的偏离。

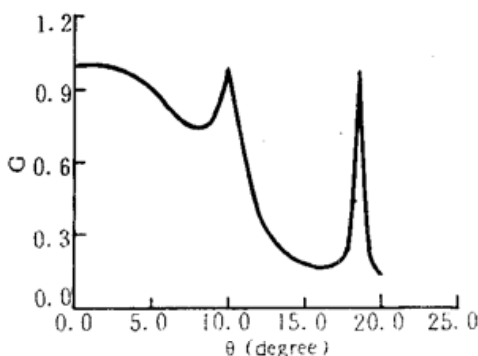


Fig. 5 Relation between  $|G^2|$  and  $\theta$

$G^2$  的物理意义可以这样理解:一个激光本征模分解成两个晶体本征模,其中一个在晶体中传播得快,另一个在晶体中传播得慢,结果激光本征模在晶片中的传播速度就介于两者之间。具体是靠近快模还是靠近慢模决定于两个分量的比的平方。由于激光两个本征模是正交的,晶片两个本征模也是正交的。所以一个激光本征模靠近快模,另一个就靠近慢模。但由于两个激光本征模在晶片中的传播速度总是介于快模和慢模之间,所以激光两本征模通过晶片所产生的位相差  $|\Delta_1 - \Delta_2|$  总是小于由快模和慢模决定的位相差  $|\beta'|$ 。

虽然  $G^2$  的大小可以从(8)式得到,但对  $G^2$  大小的想象却不是件容易的事,为了使读者有一图像,图5给出  $|G|$  随  $\theta$  的变化曲线。

**结 论** 本文用已建立的激光腔内加旋光晶片的理论处理了双折射双频激光器的频差问题,得到了和实验相符的结果。不仅解决了这个多年未解决的理论问题,也进一步证明理论和处理方法的正确性。此方法可以应用于其他类似的激光器。

作者感谢北京大学物理系郭峰在这篇文章及偏振特性理论分析中所做的部分数学及计算工作。

### 参 考 文 献

- [1] 成相印,郭继华,张书练等, 双折射双频激光器输出光偏振态特性的实验研究. 光学学报, 1995, 15(5) : 548~551
- [2] 郭继华,成相印,神 帅等, 双折射双频激光器偏振特性的分析. 光学学报, 1996, 16(1) : 32~36
- [3] Yang Sen, Zhang Shuilian, The frequency split phenomenon in a He-Ne laser with a rotation quartz plate in its cavity. *Opt. Commun.*, 1988, 68(1) : 55~57
- [4] 李恭亮,郭继华, 晶体光学原理,北京,国防工业出版社,1990 : 272~281

## Study on Beat Frequency of a He-Ne Laser with an Activity Plate in Its Cavity

Guo Jihua      Shen Shuai      Jiang Jianhua

(Department of Modern Applied Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Zhang Shulian

(Department of Precision Instruments & Mechanology, Tsinghua University, Beijing 100084)

(Received 14 May 1995; revised 4 September 1995)

**Abstract** The beat frequency characteristic of a He-Ne laser with an activity plate in its cavity is studied. The laser physics and crystal optics are used to solve the problem. One mode of laser splits into two eigenstates of crystal as it transmits in the plate.  $G$  is the ratio of them, so the time delay of the mode is between those of two eigenstates. The time delay of another mode is also between those of them. So that, the beat frequency is always less than what is determined by the phase difference of two eigenstates. It is related to the special factor  $G^2$ . Theoretical result matches the experiment very well.

**Key words** beat frequency, activity crystal, laser.