

# Ti:LiNbO<sub>3</sub> 二维渐变折射率光波导传播常数的计算

孟 晶 汤伟中 周 文

(浙江大学信电系, 杭州 310027)

胡鸿璋

(天津大学物理系, 天津 300072)

**摘 要** 从 Ti:LiNbO<sub>3</sub> 波导截面折射率分布的特点出发, 得出一套计算传播常数简单而精确的方法。文中对该法进行了分析, 并应用该方法计算了钛扩散波导的色散关系。该方法为钛扩散光波导集成光学器件的设计提供了一种较可靠的理论手段。

**关键词** 集成光学, 光波导, 传播常数。

## 1 引 言

集成光学器件的设计及评估都涉及到光波导模式传播常数。由于光波导波动方程及边界条件的复杂性, 对二维截面光波导精确求解, 特别是当波导截面折射率分布为渐变时很困难。传统解决办法可分为数值方法和近似方法<sup>[1]</sup>。数值方法精度高, 但计算量大, 物理概念含糊。近似方法计算简单, 求解思路明确, 不足之处是精度差。

集成光波导器件中常用的制作工艺是对 Ti:LiNbO<sub>3</sub> 扩散形成光波导。该波导截面折射率分布虽复杂, 但也有规律可寻, 其中最大特征就是折射率分布的对称轴 ( $y$  轴) 和界面 ( $x$  轴) 正好是折射率分布的梯度方向 (图 1)。本文所研究的方法就是基于此, 采用位相共振法发展起来的。

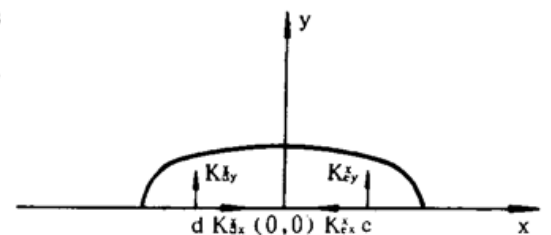


Fig. 1 The curve of the same refractive index of Ti:LiNbO<sub>3</sub> waveguide cross-sectional profile

## 2 理 论

介质中光能成为导波的条件是满足横向位相共振条件<sup>[1]</sup>。

$$\oint \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = m\pi + \sum \phi_i, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

式中  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$  为横向波矢,  $\phi_i$  为光在介质界面反射的位相跃变。(1) 式是传播常数  $\beta$  的函数。针对

Ti:LiNbO<sub>3</sub> 光波导, 若直接对(1)式进行二维求解以得到  $\beta$  是非常复杂的。如能避开对二维渐变平面的求解, 转而为对某两条有代表性一维渐变路径求解将能简化(1)式求解难度。Ti:LiNbO<sub>3</sub> 光波导折射率分布式为<sup>[2]</sup>:

$$n^2(x, y) = n_s^2 + (n_i^2 - n_s^2) \exp(-y^2/D_y^2) \left\{ \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2D_x} + \frac{x}{D_x}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2D_x} - \frac{x}{D_x}\right) \right] \right\} \quad (2)$$

式中  $n(x, y)$  为波导中  $(x, y)$  点的折射率,  $n_s$  为 LiNbO<sub>3</sub> 基底折射率,  $n_i$  表示当  $w/2D_x \gg 1$  时的表面最大折射率,  $w$  为初始钛条宽,  $D_x, D_y$  为  $x$  向,  $y$  向扩散深度。作波导横截面等折射率线图如图 1 所示。图中  $d, e$  为波导中  $x$  轴上任意两点。以  $n^2(x, y)$  对  $y$  求偏微分有:

$$\frac{\partial n^2(x, y)}{\partial y} = 2n(x, y) \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} = -\frac{y}{D_y^2} \exp(y^2/D_y^2) \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2D_x} + \frac{x}{D_x}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2D_x} - \frac{x}{D_x}\right) \right] \quad (3)$$

当  $y = 0$  时,  $n(x, 0) \neq 0$ , 所以:

$$\left. \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (4)$$

它表示沿  $x$  轴是 Ti:LiNbO<sub>3</sub> 波导折射率标量场分布的梯度方向。同样以  $n^2(x, y)$  对  $x$  求偏微分有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n^2(x, y)}{\partial x} &= 2n(x, y) \frac{\partial n(x, y)}{\partial x} \\ &= -\exp(-y^2/D_y^2) \left\{ \left(\frac{w}{2D_x} + \frac{x}{D_x}\right) \exp\left[-\left(\frac{w}{2D_x} + \frac{x}{D_x}\right)^2\right] \left(\frac{1}{D_x}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{w}{2D_x} - \frac{x}{D_x}\right) \exp\left[-\left(\frac{w}{2D_x} - \frac{x}{D_x}\right)^2\right] \left(-\frac{1}{D_x}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

当  $x = 0$  时,  $n(0, y) \neq 0$ , 所以:

$$\left. \frac{\partial n(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (6)$$

它表示沿  $y$  轴也是波导折射率标量场分布的梯度方向。

在图 1 中光波矢量  $\mathbf{K}_c$  可分为三个分量:

$$\mathbf{K}_c = K_x \mathbf{i} + K_y \mathbf{j} + \beta \mathbf{k} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  分别为对应  $x, y, z$  向的单位矢量;  $K_x, K_y$  是  $\mathbf{K}_c$  在  $x, y$  轴上投影值;  $\beta$  为波导的传播常数。以  $\mathbf{K} = K_x \mathbf{i} + K_y \mathbf{j}$  即  $\mathbf{K}_c$  的横向分量, 对于导模任意两点间的波矢增量有关系式:

$$|\Delta \mathbf{K}_c|^2 = (\Delta K_x)^2 + (\Delta K_y)^2 = |\Delta \mathbf{K}|^2. \quad (8)$$

进一步引入光线微分方程<sup>[5]</sup>:

$$\frac{d}{ds} [n(x, y) (d\mathbf{r}/ds)] = \nabla n(x, y) \quad (9)$$

式中  $r$  为矢径,  $s$  为沿径迹距离。当只考虑沿  $x$  轴时, 可将(9)式分解为(10)式:

$$\frac{d}{ds} \left[ n(x, y) \frac{dx}{ds} \right]_{y=0} = \left. \frac{\partial n(x, y)}{\partial x} \right|_{y=0}, \quad \frac{d}{ds} \left[ n(x, y) \frac{dy}{ds} \right]_{y=0} = \left. \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad (10)$$

以  $\theta(x, y)$  为  $x$  轴上任一点的光波矢量与  $x$  轴间夹角, 于是  $dy/ds = \sin \theta(x, y)$ , 将(4)式代入(10)式有:

$$\frac{d}{ds} [n(x, y) \sin \theta(x, y)]_{y=0} = 0 \quad (11)$$

所以沿  $x$  轴,  $n(x, y) \sin \theta(x, y)$  为常量,  $K_x$  (上标  $x$  代表沿  $x$  轴上的  $K_x$ , 上标  $y$  亦同理可

得) 可表为  $k_0 n(x, y) \sin \theta(x, y)$  所以也是个常量(本质上是折射率定律的推广)。由(8)式则有:

$$|\Delta K^z|^2 = (\Delta K_x^z)^2, \quad \text{即 } |\Delta K^z| = k_0 \Delta n(x, 0) = \Delta \cdot K_x^z \quad (12)$$

由(9)式到(12)式其实说明这样一个关系, 即沿折射率梯度方向是光波矢量的值变化最快向, 并且变化量只取决于波矢沿此方向分量的变化量。

由(11)式可知沿  $x$  轴上任一点的波矢  $y$  向分量绝对值不变。同理沿  $y$  轴上任一点的波矢  $x$  向分量绝对值也是常量。因此针对如图 1 的横向折射率分布波导在  $x$  轴上的导波光就存在两个波矢分量常量:  $k_x^z$  和波导传播常数  $\beta$ 。另取一新的常量  $\beta'$ , 使之满足:

$$\beta'^2 = \beta^2 + (k_x^z)^2 \quad (13)$$

当  $\beta'$  被视作一平板波导传播常数时, 相当于由图 1 中  $x$  轴上折射率分布沿  $y$  方向无限延拓而构成如图 2 的渐变对称平板波导, 波导  $x$  向扩散深度为  $D_x$ :

采用位相共振法<sup>[6]</sup>求解该平板波导传播常数  $\beta_i$ :

$$\int_{-x_1}^{x_1} k_x^z dx = l\pi + \phi_1 + \phi_2 \quad (14)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

式中  $(k_x^z)^2 = k_0^2 n^2(x, 0) - \beta_i^2$ ,  $\phi_1, \phi_2$  对于渐变折射率为  $\pi/4$ <sup>[1]</sup>,  $l$  为模阶数,  $x_l$  满足关系  $n(x_l, 0) = \beta_i/k_0$ 。该超越方程采用二分法用计算机不难求解出  $\beta_i$ 。

另一方面, 图 1 中  $(0, 0)$  点的波矢满足关系:

$$k_0^2 n^2(0, 0) - k_y^z(0, 0) = \beta^2 + k_x^z(0, 0) = \beta'^2 \quad (15)$$

式中  $\beta$  为光波导传播常数。如前讨论, 在  $y$  轴上波矢的  $x$  向分量  $K_x^z$  为常量。避开  $K_x^z$  而仅考虑  $K_y^z$  和  $\beta$  量, 则相当于将  $y$  轴沿  $x$  向无限延拓构成另一非对称渐变平板波导, 如图 3 所示。

由(15)式, 以  $\beta'/k_0$  作为图 3 所示平板波导  $y = 0$  处的折射率, 则该平板波导折射率分布为:

$$\begin{cases} n^2(x, y) = n_0^2 + \Delta n^2 \exp(-y^2/D_y^2) \operatorname{erf}(W/2D_x) \\ n(x, 0) = \beta_i/k_0 \end{cases} \quad (16)$$

Fig. 3 The asymmetric planar waveguide whose propagation constant is  $\beta_{im}$

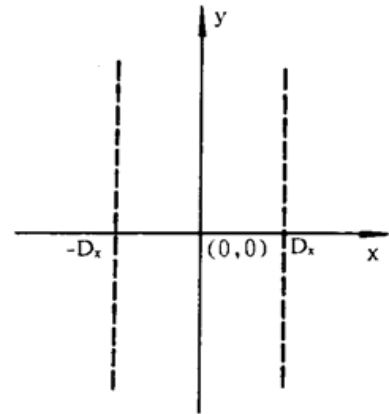
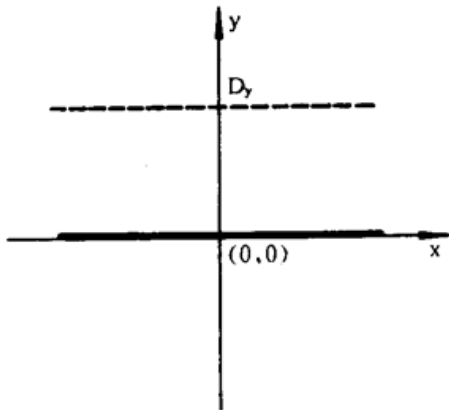


Fig. 2 Symmetric planar waveguide with propagation constant of  $\beta_i$

同样用位相共振法求解图 3 平面波导的传播常数

$$\beta_{im}:$$

$$\int_0^{y_m} k_y^z dy = m\pi + \phi_1 + \phi_2 \quad (17)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

式中  $(k_y^z)^2 = n^2(0, y) - \beta_{im}^2$ ,  $\phi_1$  为界面反射位相跃变, 取  $\pi/4$ <sup>[1]</sup>(渐变折射率处的位相跃变),  $\phi_2$  为  $y = 0$  处的位相跃变<sup>[1]</sup>:

$$\phi_2 = \begin{cases} \arctg \sqrt{\frac{\beta_{im}^2 - n_c^2}{n^2(x, 0) - \beta_{im}^2}} & \text{(TE 模)} \\ \arctg \left( \frac{n^2(x, 0)}{n_c^2} \sqrt{\frac{\beta_{im}^2 - n_c^2}{n^2(x, 0) - \beta_{im}^2}} \right) & \text{(TM 模)} \end{cases} \quad (18)$$

式中  $n_c$  为覆盖层折射率，空气中  $n_c = 1$ 。 $Y_m$  满足关系式： $n(x, Y_m) = \beta_{im}/k_0$ 。对(17)式采用二分法数值求解，最后就可求得  $\beta_{im}$ ，即真实光波导传播数。 $l, m$  分别为横向和纵向模阶数。

### 3 实例计算

为验证上述方法，对 Ti:LiNbO<sub>3</sub> 传播常数作了对比求解<sup>[3]</sup>，求解的初始条件如表 1 所列。经求解得出结论如表 2 所列。

Table 1. The initial parameters of Ti:LiNbO<sub>3</sub> waveguides

| No. | LiNbO <sub>3</sub> | $\lambda$ ( $\mu\text{m}$ ) | Pol. | $D_x$ ( $\mu\text{m}$ ) | $D_y$ ( $\mu\text{m}$ ) | $n(0, 0 - n_s$ |
|-----|--------------------|-----------------------------|------|-------------------------|-------------------------|----------------|
| 1   | Y cut              | 0.6                         | TE   | 4.135                   | 3.50                    | 4.714E-3       |
| 2   | Z cut              | 1.2                         | TM   | 4.135                   | 4.135                   | 3.429E-3       |
| 3   | Y cut              | 1.2                         | TE   | 4.135                   | 3.50                    | 4.051E-3       |

Table 2. The results of 3 methods

| No. | b | Fun.  |        |       |
|-----|---|-------|--------|-------|
|     |   | (1)   | (2)    | (3)   |
| 1   |   | 0.417 | 0.425  | 0.385 |
| 2   |   | 0.055 | 0.0555 | 0.056 |
| 3   |   | 0.014 | 0.033  | 0.033 |

Notes: (1) indicates the finite element method. (2) indicates the method of this artical. (3) indicated the quasi-analytical technique. b is normalized propagation constant.

由表 2 可见，该法在近截止和远离截止时，同有限元法相比基本一致，特别是在远截止区，它较准解析有效折射率法精度更高。

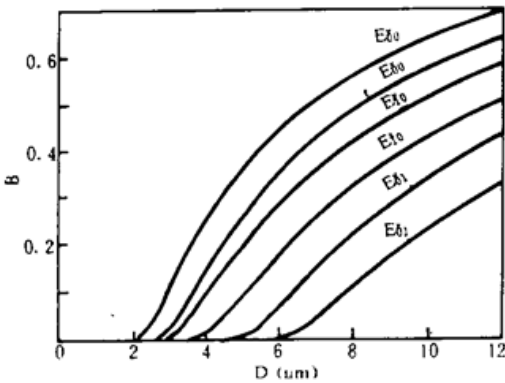


Fig. 4 Normalized propagation constant and diffusion depth curves

为对 Ti:LiNbO<sub>3</sub> 光波导扩散特性作一全面观察，应用该方法对一系列钛扩散深度作计算，计算的初始条件为：初始钛条宽  $W$  为 5.0 ( $\mu\text{m}$ )，厚  $\tau$  为 0.06 ( $\mu\text{m}$ )，扩散温度  $T$  为 1050  $^{\circ}\text{C}$ ，表面最大折射率  $n_s$  取扩散 8 个小时的  $n_s$  值<sup>[4]</sup>，并假定  $n_s$  值与扩散深度无关。最后将计算结果作图如图 4 所示。

图 4 中  $E_{m,n}^x$  对应 TE 模， $E_{m,n}^y$  对应 TM 模， $D$  对应深度方向扩散深度， $B$  对应归一化传播常数，光波长取 1.152  $\mu\text{m}$ 。

### 4 总 结

该方法本质上属于近似方法，因为计算中采用了两个近似<sup>[5]</sup>：

$$\nabla \ln(n^2) \approx 0, \quad E^z \text{ 和 } H^z \approx 0,$$

从而决定了该法的两个适用条件:

- 1)  $|\nabla n| \ll 1$ , 即折射率缓变, 且在光波长范围内变化幅度非常小。
- 2) 导波满足弱导条件。

当该法引用到阶跃矩形波导中时蜕化为有效折射率法<sup>[1]</sup>。反之单一的有效折射率法求解二维渐变波导传播常数精度很差。

该方法在实践上已应用到集成光学声光耦合滤波器的制作中<sup>[7]</sup>。该法成功地预言了特定参数光波导对 1.152 μm 波长双模的出现。在分析器件特性时, 对双模波导声光效应所致双声频吸收峰间距的分析同实验结果非常符合。

这种方法对其他不规则二维折射率分布光波导只要适当选取计算路径同样适用, 因而该法具有普适性。经过实际多次计算, 此法表现稳定, 确实为一种简洁而可靠的方法。

### 参 考 文 献

- [1] 方俊鑫, 曹庄琪等, 光波导技术物理基础, 上海交大出版社, 1988: 15~68
- [2] Ning HuaZhu, Analytical expressions of the guided mode field distribution; analysis and comparison. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1992, QE-28(6): 1424~1428
- [3] E. Strake, G. P. BVA, I. Montrosset, Guided modes of Ti:LiNbO<sub>3</sub> channel waveguides; A novel Quasi-analytical technique in comparison with the scalar finite-element method. *J. Lightwave Technol.*, 1988, LT-6(6): 1126~1135
- [4] S. Fouchet, A. Carencio, C. Daguët, et al., Wavelength dispersion of Ti induced refractive index change in LiNbO<sub>3</sub> as a function of Diffusion parameters. *J. Lightwave Technol.*, 1987, LT-5(5): 700~708
- [5] 胡鸿璋, 凌世德, 应用光学原理, 北京, 机械工业出版社, 1993: 5~6
- [6] 金锋, c-切 LiNbO<sub>3</sub> 扩散波导 TM 模的本征值方程. 光学学报, 1984, 4(5): 430~436
- [7] 孟 晶, 声光可调谐集成光学滤波器的研制. 天津大学物理系硕士学位论文, 1995: 38~40

## Calculation of Propagation Constant of Ti:LiNbO<sub>3</sub> Waveguide with 2-Dimensional Graded Index Profiles

Meng Jin      Tang Weizhong      Zhou Wen

(Information and Electronic Engineering Department, Zhejiang University, Hanzhou 310027)

Hu Hongzhang

(Department of Physics, Tianjin University, Tianjin 300072)

(Received 15 April 1995; revised 19 August 1995)

**Abstract** A accurate and simple method for calculating the propagation constant of Ti:LiNbO<sub>3</sub> waveguide is suggested according to the property of refraction index profiles. The method is analysed and the dispersive relation of Ti:LiNbO<sub>3</sub> waveguide is calculated by this method. It provides a theoretical approach to design Ti:LiNbO<sub>3</sub> integrated optical devices.

**Key words** integrated optics, waveguide, propagation constant.