

矩形波导中超短脉冲电子束的相干同步辐射

胡素兴 傅恩生

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 考虑了当射频调制的超短脉冲电子束径向长度远小于辐射波长时, 将其理想化为 δ 时间函数, 提出了用波导本征模展开的方法来计算矩形波导中超短脉冲电子束的相干同步辐射及其频率特性。结果发现: ① 当谐振频率等于调制电子束微脉冲间隔的射频的整数倍时, 辐射模式表现为“纯”的波导本征模。② 波导效应使得超短脉冲电子束在两个频率处发生相干同步辐射, 而且低频支的辐射功率高于高频支的。最后指出了波导自由电子激光器单横模运行的条件。

关键词 波导自由电子激光器, 超短脉冲, 相干同步辐射。

1 引 言

远红外波导自由电子激光器(FIR-WFEL)正开拓着自由电子激光器应用的新领域^[1~3]。这是由于: 首先, 远红外波导自由电子激光器不需要庞大而昂贵的高能加速器系统, 它只需要几兆电子伏的能量, 而且它对电子束的质量要求不高, 因而一般可采用造价较低的射频注入器作加速器, 另外它明显放宽了对摆动器随机场误差的严格限制^[4]; 其次在远红外区域, 除了分立的分子激光器以外至今还没有高功率可调谐的相干辐射源。所以, 目前世界各地正在积极兴建远红外波导自由电子激光器^[5, 6]。通常用射频直线加速器(RF-Linac)来驱动这类自由电子激光器。这种类型加速器的特点在于一个宏脉冲内包含一系列射频调制的微脉冲串。微脉冲的持续时间可短至几个皮秒, 微脉冲间隔可由射频控制。

在远红外光谱范围内, 长波长与超短电子脉冲形成了鲜明的对照, 束波的相对滑移变得厉害, 即短脉冲效应尤为显著。因此波导的应用变得不可缺少。波导限制了辐射波的群速, 使之与电子束同步而获得较好的耦合, 如图1所示。

极短的电子束微脉冲其空间持续可短至几百个微米, 因而对毫米波来说, 这样的超短脉冲电子束可理想化为点电荷源, 也即 δ 时间函数。这一条件可表达为 $l_e \ll \lambda_s$, 其中 l_e 为电子束的径向长度, λ_s 为辐射波长。这一理想化处理是合理的。

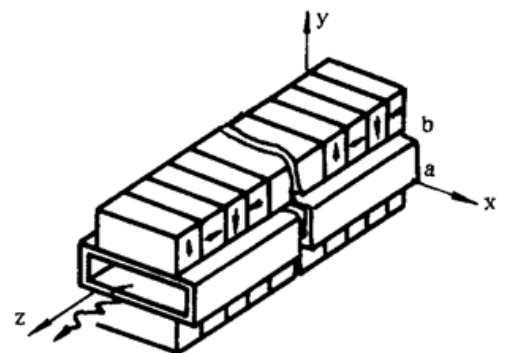


Fig. 1 Geometry of a rectangular waveguide inserted into the linear wiggler gap

这种特性的电子束脉冲由于已经高度群聚, 电子束的相位分布几乎集中在一个很窄的范围内, 因而它对外界输入波的增益几乎趋于零。然而这样的超短电子束将以另一种形式辐射能量, 即相干同步辐射^[7]。

本文把这种超短微脉冲理想化为 δ 时间函数, 在第二部分中利用波导本征模展开的方法计算了超短脉冲电子束在矩形波导中的相干同步辐射。第三部分讨论了谐振频率特性和横模数目。最后总结全文, 强调了矩形波导中超短脉冲电子束相干同步辐射的两个新特征。

2 相干同步辐射

如图 1 所示, 考虑超短脉冲电子束沿 z 轴穿过一线极化的摆动器磁场 $B_w = B_0 \cos k_w z$, $k_w = 2\pi/\lambda_w$, λ_w 是磁场周期。超群聚的电子束微脉冲在 x 方向作摇摆运动, 其横向速度矢量为:

$$\vec{\beta}_\perp = \frac{\sqrt{2}K}{\gamma} \sin(k_w z) \vec{x}, \quad 0 < z < L \quad (1)$$

其中 $K = eB_0\lambda_w/2\sqrt{2}\pi mc^2$ 为摆动器的无维场强, γ 为电子的相对论能量因子。

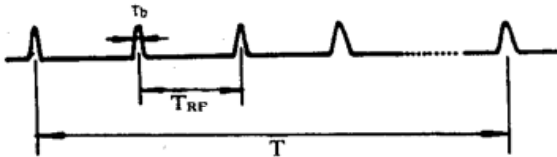


Fig. 2 Time structures of ultrashort pulse electron beam modulated by radio-frequency (RF). $\tau_b \ll T_{RF}$, $\tau_b \ll T_s$, T_{RF} is the RF period, T_s is the radiation period, T is the macropulse duration time

图 2 示意了射频电子束的时间行为。其中 T_{RF} 是电子束的射频调制周期, 即两微脉冲之间的时间间隔。微脉冲宽度 $\tau_b \ll T_{RF}$, 当 $\tau_b \ll T_s$ 时, 可将超短脉冲序列理想化为 δ 时间函数。其中 T_s 为辐射波的周期。于是在相互作用区, 电荷密度的时间行为可表示为:

$$\rho(t) = \delta(z/\beta_z c - t + pT_{RF}), \quad 0 < z < L, \quad 0 \leq p \leq P_{max} \quad (2)$$

其中 t 是从 0 到宏脉冲持续时间内的变量, $\beta_z \approx 1 - (1 + K^2)/2\gamma^2$ 是电子束轴向相对论速度, p 是一系列

整数, 其最大值即是一个宏脉冲中所含的微脉冲数。

在横向空间行为上, 假设电子束具有归一化的半余弦形, 则电荷密度的空间行为可写作:

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{4\sigma_x\sigma_y} \cos \frac{\pi}{\sigma_x} \left(x - \frac{a}{2}\right) \cos \frac{\pi}{\sigma_y} \left(y - \frac{b}{2}\right)$$

其中 σ_x 、 σ_y 分别为电子束在 x 、 y 方向上的最大宽度, a 、 b 为矩形波导的尺寸。假设电子束从 $(a/2, b/2, 0)$ 注入, 从而包括时间和空间行为的电荷密度为 $\rho(x, y, t) = - (I_p/\beta c) \rho(x, y) \rho(t)$ 。于是得到电子束的横向电流密度 $J_\perp(x, y, t)$ 为:

$$\begin{aligned} J_\perp(x, t) &= - \rho(x, t) \beta_\perp c \\ &= - I_p \frac{\sqrt{2}K}{\beta\gamma} \frac{\pi^2}{4\sigma_x\sigma_y} \cos \frac{\pi}{\sigma_x} \left(x - \frac{a}{2}\right) \cos \frac{\pi}{\sigma_y} \left(y - \frac{b}{2}\right) \\ &\quad \times \sin(K_w z) \delta\left(\frac{z}{\beta_z c} - t + PT_{RF}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 I_p 为微脉冲峰值电流。

众所周知, 在矩形波导中横向电流密度 $J_\perp(x, y, t)$ 的 ω 谐量 $J_\perp\omega$ 将作为频率为 ω 的辐射波的电流源^[8]。展开 $J_\perp(x, y, t)$ 为:

$$J_{\perp}(x, t) = \int J_{\perp\omega}(x) \exp(-i\omega t) d\omega$$

其中

$$J_{\perp\omega}(x) = -I_p \frac{\sqrt{2}K}{\beta\gamma} \frac{\pi^2}{4\sigma_x\sigma_y} \cos \frac{\pi}{\sigma_x} \left(x - \frac{a}{2}\right) \cos \frac{\pi}{\sigma_y} \left(y - \frac{b}{2}\right) \sin(k_w z) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{\beta_z c} + pT_{RF}\right)\right] \mathbf{x} \quad (4)$$

此电流密度谱量产生的辐射可以用矩形波导的本征模 E_n 来展开。

众所周知由于 TE_{0n} 模在矩形波导中的低损耗和横场特性, 它将优先被激发。根据 Jackson 的著作^[9], TE_{0n} 本征模可写作:

$$E_{z,0n}^{(\pm)} = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(\pm ik_{0n}z) \mathbf{x}, \quad H_{z,0n}^{(\pm)} = -\frac{2iK_c\beta_g}{Z_0K_{0n}\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(\pm iK_{0n}z) \mathbf{z}$$

其中自由空间阻抗 $Z_0 = 377 \Omega$ 。对于 TE_{0n} 模, 有参量

$$K_c^2 = n^2\pi^2/b^2, \quad K_{0n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K_c^2, \quad \beta_g = ck_{0n}/\omega$$

这里 k_c 为 TE_{0n} 模的截止波数。 β_g 为 TE_{0n} 模在波导中的相对论群速。超短脉冲电子束的辐射可以用波导本征模展开^[7], 即

$$\mathbf{E}^{(\pm)} = \sum_n A_{0n}^{(\pm)} E_{0n}^{(\pm)}$$

假设波导壁是良导体, 应用坡印亭(Poyting)定理, 展开系数可按式求得

$$A_{0n}^{(\pm)} = -\frac{Z_0}{2} \frac{1}{\beta_g} \int_V J_{\perp\omega} \cdot E_{0n}^{(\mp)} dV$$

在相互作用体积内积分得到

$$A_{0n}^{(\pm)} = -\frac{Z_0 I_p K}{2\beta_g \beta \gamma \sqrt{ab}} \mathcal{F}_{0n}(\sigma_y) i \exp\left(i\frac{\omega}{\omega_{RF}} 2p\pi\right) \times \int_0^L \left[\exp\left(i\left(\frac{\omega}{\beta_z c} - k_w - k_{0n}\right)z\right) - \exp\left(i\left(\frac{\omega}{\beta_z c} + k_w - k_{0n}\right)z\right) \right] dz \quad (5)$$

其中对 TE_{0n} 模填充因子等于

$$\mathcal{F}_{0n}(\sigma_y) = \frac{1}{4\sigma_y} \left\{ \frac{1}{n/b + 1/\sigma_y} \left[\cos \frac{(n+1)b + n\sigma_y}{2b} \pi - \cos \frac{(n-1)b - n\sigma_y}{2b} \pi \right] + \frac{1}{n/b - 1/\sigma_y} \left[\cos \frac{(n-1)b + n\sigma_y}{2b} \pi - \cos \frac{(n+1)b - n\sigma_y}{2b} \pi \right] \right\}$$

在方程(5)中, 积分沿摆动器长度进行, 被积函数为两个迅速振荡的指数项, 只有当指数因子接近 0 时才对积分结果有贡献。从第一式很明显得到它对积分有贡献的条件为 $\omega/\beta_z c - k_w - k_{0n} = 0$ 。这正是波导自由电子激光器束波的谐振条件。同时发现第二式从不为 0, 因此它对积分结果无贡献。同理, 在摆动器入口处的展开系数 $A_{0n}^{(-)}$ 也消失, 即无反向辐射波。因而得到在摆动器出口处的展开系数为

$$A_{0n}^{(+)} = \frac{Z_0 I_p K}{2\beta_g \beta \gamma \sqrt{ab}} \mathcal{F}_{0n}(\sigma_y) \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_{RF}} 2p\pi\right) \exp(i\theta/2) \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \quad (6)$$

其中 $\theta = (\omega/\beta_z c - k_w - k_{0n})L$ 。L 为通常的自由电子激光器位相漂移参数。从(6)式中发现, 当谐振发生且谐振频率 ω_s 正好等于调制电子束的射频 ω_{RF} 的整数倍时, $A_{0n}^{(+)}$ 将表现为实数。这表明辐射场是“纯”的波导本征模, 此时辐射功率最强。

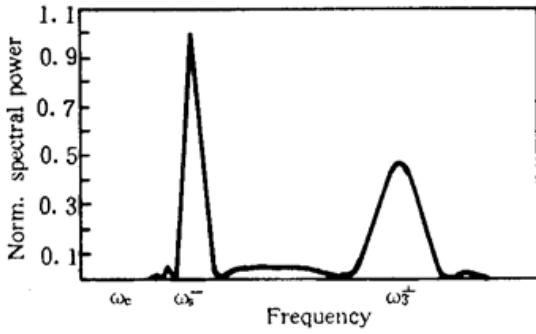


Fig. 3 Schematic diagram of normalized coherent synchrotron radiation power spectral emitted by ultrashort electron micropulse in a rectangular waveguide, where ω_c is the cut-off frequency for TE_{0n} modes

3 相干同步辐射的频率特性

在上一部分, 已经得到了射频远红外波导自由电子激光器的谐振条件为 $\omega/\beta_z c - k_w - k_{0n} = 0$, 联立矩形波导的色散关系式 $k_{0n}^2 = \omega^2/c^2 - k_z^2$, 即可解出其谐振频率

$$\omega_s^\pm = \gamma_z^2 \beta_z k_w c (1 \pm \delta) \quad (9)$$

其中, 对于 TE_{0n} 模, 波导效应参数 δ 等于

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_z^2} - \frac{n^2 \pi^2}{\gamma_z^2 k_w^2 b^2}} \quad (10)$$

式中 $\gamma_z = \gamma / \sqrt{1 + K^2}$ 为电子的轴上相对论能量因子, n 是 TE_{0n} 模的角标。从(9)式发现当波导效应参数 $\delta \neq 0$ 时, 电子束将在两个频率处相干发射。然而当狭窄波导间隙 b , 使 b 满足 $b = n\lambda_w / 2 \sqrt{\gamma_z^2 - 1}$ 时, δ 将为零, 这意味着满足如此条件的波导严格限制了波的群速, 束波之间的滑移变为零, 两者很好地同步。此时, 超短脉冲电子束将在一个宽谱范围内相干同步辐射。

(10)式中, 由于根式下非负的要求, 对 TE_{0n} 模数目有如下限制条件

$$n < \frac{2 \sqrt{\gamma_z^2 - 1} b}{\lambda_w} \quad (11)$$

从(11)式可以看到, 当电子束能量和摆动器周期一定时, 波导中激发的 TE_{0n} 模数是确定的。换句话说, 通过改变波导间隙 b 或摆动器周期 λ_w 可以使射频远红外波导自由电子激光器单横模运行。这也是波导自由电子激光器的另一个优点。

结束语 在紧凑的远红外波导自由电子激光器中, 由于射频调制电子束独有的超短脉冲特性, 即 $\tau_b \ll T_s$ 。本文将这种特性合理地抽象为时间上的 δ 函数, 然后用波导本征模展开的方法计算了超短脉冲电子束在矩形波导中的相干同步辐射及其频率特性。结果发现: ① 当谐振频率等于调制电子束的射频频率的整数倍时, 辐射模将表现为“纯”的波导本征模; ② 波导效应使超短脉冲电子束在两个频率处谐振相干同步辐射, 而且低频辐射功率高于高频的。

当狭窄波导间隙 b 时, 两频率辐射相互靠近, 最后形成宽带相干同步辐射。此时可能产生超短亚皮秒光脉冲^[10]。另外通过改变波导间隙 b 和摆动器周期 λ_w , 可以使波导自由电子激光器单横模运行。结合这些新特性。作者已对上海射频远红外波导自由电子激光器进行了设计研究^[11]。

根据坡印亭定理, 对波导横截面 Σ 积分, 立即计算出辐射进入 TE_{0n} 模的功率

$$\begin{aligned} P_{0n}(\omega) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\Sigma} (\mathbf{E}^{(+)} \times \mathbf{H}^{*(+)}) \cdot \mathbf{z} \, d\Sigma \\ &= \frac{\beta_z}{2Z_0} |A_{0n}^{(+)}|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

也即

$$P_{0n}(\omega) = \frac{Z_0 K^2}{8\beta_z \gamma_z^2} I_p^2 \frac{L^2}{ab} \mathcal{F}_{0n}^2(\sigma_y) \left(\frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \right)^2 \quad (8)$$

图 3 绘出了超短脉冲电子束相干同步辐射的归一化功率谱。从中可见低谐振频率处的辐射功率高于高谐振频率的。

致谢 真诚地感谢贵州新华激光照排印刷公司的陈丽珊小姐对本文的编辑排版和支持。

参 考 文 献

- [1] L. R. Elias, Free-electron laser research at the university of califoria, Santa, Barbara, *IEEE. J. Quant. Electron.*, 1987, **23**(9): 1470~1477
- [2] K. J. Kim, Andrew Sessler, Free electron laser: present status and future prospect. *Science*, 1991, **250**(1): 88~97
- [3] R. Coission, Fu Ensheng, Performances and possible uses of far infrared FEL. *Acta Optica Sinica*, 1991, **11**(9): 708~713
- [4] Hu Suxing, Fu Ensheng, Phase space analysis of free electron laser efficiency decrease due to random field error. *Acta Physica Sinica*, (overseas), 1996, **5**(1): 31~38
- [5] Y. C. Huang, J. Schmerge, *et al.*, Compact far-IR FEL design. *Nucl. Instr. & Meth.*, 1992, **A318**(1): 765~773
- [6] E. D. Shaw, R. J. Chichester, Broadly current tuned far-infrared free electron laser. *Nucl. Instr. & Meth.*, 1992, **A318**(1): 47~58
- [7] A. Gover, F. V. Hartemann, G. P. Le Sage *et al.*, Time and frequency domain analysis of superradiant coherent synchrotron radiation in a waveguide free electron laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(8): 1192~1196
- [8] A. Doria, G. P. Gallerano, A. Renieri, Kinematic and dynamic properties of a waveguide FEL. *Opt. Comm.* 1991, **80**(3): 417~426
- [9] D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, VIII, New York, Wiley, 1975: 215~310
- [10] Hu Suxing, Fu Ensheng, Compression effect of ultrashort pulse in far infrared waveguide free electron laser. *Chin. Phys. Lett.*, 1995, **12**(12): 720~723
- [11] Hu Suxing, Fu Ensheng, Design investigation of Shanghai far infrared waveguide free electron laser driven by RF-Linac. *J. Chinese Laser (B)*, 1995, **B4**(5): 397~404

Coherent Synchrotron Radiation of Ultrashort Electron Pulse in a Waveguide Free-Electron Laser

Hu Suxing Fu Ensheng

(Shanghai Institute of Optical and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 9 March 1995; revised 12 May 1995)

Abstract Idealizing the radio-frequency (RF) modulating ultrashort electron pulse as a δ time function, we analyze theoretically the coherent synchrotron radiation emitted by the high bunched electron beam and its frequency properties in a rectangular waveguide. We find two new performances: (1) when the resonance frequency f_s is just equal to integral times of radio frequency f_{RF} which is applied to modulate electron beam, the coherent synchrotron radiation field pattern appears "pure" waveguide eigenmode; (2) the coherent synchrotron radiation power at low resonance frequency is higher than that of at high resonance frequency. In addition, we predict the condition for single mode transverse operation in a waveguide FEL.

Key words waveguide free-electron laser, ultrashort pulse, coherent synchrotron radiation.