

# 相对论相干三次谐波的饱和

曹贵华 沈百飞 余 纬 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

**摘 要** 研究了短脉冲强激光在非稠密均匀等离子体中传播时产生的相对论相干三次谐波的饱和问题。在准静态近似(quasistatic approximation)下得出波动方程, 用此方程计算了三阶谐波的饱和值及失相长度, 并分析了影响失相长度的因素。

**关键词** 饱和效应, 失相长度, 谐波辐射,

强激光技术的发展, 使得强激光等离子体集体相互作用中出现许多新的现象<sup>[1]</sup>, 其中相对论相干谐波辐射以其作为实现相干短波长辐射源的一条重要途径, 以及在等离子体加速和等离子体诊断中的重要地位而受到人们的重视<sup>[2~4]</sup>。

谐波辐射中一个重要的特征是转化效率, 实用中总希望有较高的转化率, 但在相对论相干谐波辐射中, 转化率受到饱和的影响。文献[2]分析了相对论相干三次谐波, 并描述了三阶谐波包络的线性增长特征, 但没能描述饱和效应, 因而出现久期发散困难; 文献[3]认为文献[2]中出现久期增长的原因是, 在利用准稳态近似条件时, 数学变换  $\zeta = z - Vt, t = \tau$  中的变换速度  $V$  取光速  $c$ , 若取为入射激光的相速度  $v_{ph}$ , 则可正确地描述饱和效应, 并在此基础上分析了谐波的饱和效应。

本文取  $V = c$ , 在准稳态近似下, 研究了短脉冲强激光在非稠密均匀等离子体中传播时产生的相对论相干三次谐波的饱和问题; 指出了文献[3]中上述观点的错误性, 发现谐波的饱和与变换无关, 计算了三阶谐波的饱和值及失相长度。

## 1 光场演化方程

激光等离子体相互作用可用矢势  $A$  和标势  $\Phi$  所满足的麦克斯韦(Maxwell)方程:

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})A = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi + \frac{4\pi e}{c} NV \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi e(N - N_0) \quad (2)$$

以及等离子体中电子流体所满足的动力学方程和连续性方程:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + m_0 c^2 \nabla \cdot \sqrt{1 + (\frac{P}{m_0 c^2})^2} = e(\nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{A}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (NV) = 0 \quad (4)$$

来描述, 式中  $N$  为等离子体密度,  $N_0$  为等离子体初始密度,  $e$ 、 $m$  分别为电子电量和电子质量,  $P$ 、 $V$  分别为电子流体动量和速度, (1~4) 式中采用了库仑规范  $\nabla \cdot A = 0$ 。

引进规一化量  $a = eA/m_0c^2$ ,  $\phi = e\Phi/m_0c^2$ ,  $\rho = P/m_0c$ , 作代数变换

$$\zeta = z - Vt, \quad \tau = t \quad (5)$$

并取变换速度  $V$  为光速  $c$ , 利用条件  $\partial/\partial\tau \ll c\partial/\partial\zeta$ , 对线偏振入射激光  $a = (1/2) a_L \exp(ik\zeta) + c.c.$ ,  $a_L$  为入射激光的幅值, 非稠密等离子体中光场的演化方程

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial\tau}\right) a = \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} a + \frac{k_p^2}{(1 + \phi_s)^2} a \phi_f \quad (6)$$

式中  $\phi_f = [k_p^2/32k^2(1 + \phi_s)^2] (a^2)_f$ ,  $\phi_s = \sqrt{1 + (1/2) a_L^2} - 1$ , 脚标表示取快变部分。

## 2 三次谐波的失相与饱和

为研究相对论相干谐波辐射, 设等离子体中光场为

$$a = \frac{1}{2} \sum a_n \exp(ink\zeta)$$

$n = \pm 1, \pm 2, \dots$ , 代入(5)式得到三阶谐波和基波包络的动力学演化方程

$$\frac{2ik_3}{c} \frac{\partial a_3}{\partial\tau} = \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} a_3 + S a_1^3, \quad \frac{2ik}{c} \frac{\partial a_1}{\partial\tau} = \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} a_1 + S |a_1|^2 a_1 \quad (7)$$

式中  $S = \frac{k_p^4}{32(1 + \phi_s)^4 k^2}$ 。

令  $a_1 = \tilde{a}_1 \exp[i\theta_1(\tau)]$ ,  $a_3 = \tilde{a}_3 \exp[i\theta_3(\tau)]$ ,  $\tilde{a}_1$ ,  $\tilde{a}_3$ ,  $\theta_1(\tau)$ ,  $\theta_3(\tau)$  分别为包络  $a_1$ ,  $a_3$  的振幅和相位, 相移  $\Delta\theta = \theta_3 - 3\theta_1$ , 代入(7)式在小信号近似下, 得到振幅和相移的方程

$$\tilde{a}_1 \simeq a_L, \quad \frac{2k_3}{c} \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial\tau} = S \sin \Delta\theta, \quad \tilde{a}_3 \frac{\partial \Delta\theta}{\partial\tau} = \frac{4c}{3k} \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} \tilde{a}_3 + \frac{c}{6k} S \cos \Delta\theta \quad (8)$$

于是

$$\tilde{a}_3 = - \frac{k_p^2 a_L^3}{128k^2(1 + \phi_s)^3} \cos \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \frac{k_p^2}{k} \frac{c\tau}{1 + \phi_s} \quad (9)$$

(9)式表明三次谐波包络的幅值随时间按正弦规律振荡, 其增长与饱和将周期性出现, 这表明它是一种振荡饱和, 其失相长度

$$L_e = \frac{3}{8} \frac{\lambda_p^2}{\lambda} (1 + \phi_s) \quad (10)$$

## 3 结论与讨论

1). 从(9)式知, 当  $c\tau \rightarrow 0$  时  $\tilde{a}_3$  与时间成线性关系

$$\tilde{a}_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{4\lambda_p}\right)^3 \frac{a_L^3}{(1 + \phi_s)^4} \omega_p \tau \quad (11)$$

(11)式与文献[2]中结果一致。

2). 经过失相长度  $L_e$  达到饱和, 饱和值

$$\tilde{a}_{3s} = \frac{k_p^2 a_L^3}{128k^2(1 + \phi_s)^3} \quad (12)$$

由于  $k_p \ll k$ , 其饱和值是很小的, 因而对应的转化率亦很小, 如何提高转化率是一个有待研究的问题。

3). 比较文献[3, 4], 根据上述分析发现, 谐波的饱和效应与数学变换(5)式中的变换速度取相速还是光速无关, 文献[3]认为在准稳态近似下, 不同变换对饱和效应的影响不同的观点是不正确的。(9)式表明直接影响三阶谐波失相长度的是相移及等离子体本身的特性而不是入射光的相速度。

### 参 考 文 献

- [1] P. Sprangle, E. Esarey, Interaction of ultrahigh laser field with beam and plasmas. *Phys. Fluids*, 1992, **B4**(2): 2241~2248
- [2] P. Sprangle, E. Esarey, A. Ting, Nonlinear interaction of intense laser pulse in plasma. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(6): 4463~4469
- [3] E. Esarey, A. Ting, P. Sprangle *et al.*, Nonlinear analysis of relativistic harmonic generation by intense laser in plasmas. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 1993, **SC-21**(1): 95~104
- [4] J. M. Rax, N. J. Fisch, Third harmonic generation with ultra-high intensity laser pulse. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **69**(5): 772~775

## Saturation of Third Relativistic Coherent Harmonics

Zeng Guihua    Shen Baifei    Yu Wei    Xu Zhizhan

(Shanghai Institute of Optics and Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 20 June 1995)

**Abstract** The saturation of third relativistic coherent harmonics generated by ultrahigh laser in underdense plasma was analysed; A mistake in previous analysis was pointed. The saturation amplitude and dephase length were calculated and the factors that affect the dephase length was discussed.

**Key words** saturation, dephase length, relativistic harmonics generation.