第16卷 第5期　　光　学　学　报　　Vol. 16, No. 5
1996年5月　　ACTA OPTICA SINICA　　May, 1996

求解自由电子激光场的微扰方法

程　亚　陈建文
（中国科学院上海光学精密机械研究所，上海 201800）
刘楚湘
（新疆师范大学物理系，乌鲁木齐 830053）

摘　要　借助于固体理论中的LLP变换研究自由电子激光场的光子统计性质，并发展了一种微扰方法予以求解。

关键词　自由电子激光场，　幺正变换。

1　引　　言

光的量子理论指出：光场由许多个光量子组成，每个光量子均携带动量和能量。然而完整地描述光场不仅要知道光量子的动量和能量，还必须知道光量子的位相信息。对于通常的激光场，当激光器工作在远高于阈值的情况下可认为处于相干态，其经典对应即是具有确定位相的平面波。而对自由电子激光场则不同。虽然自由电子激光的单色性、方向性均可与常规激光媲美，但这并不能保证它一定处于相干态。80年代初，Dattoli，Becker，Zubairy，Scully[1~4]等人作了一系列这方面的工作，结果表明在略去电子反冲的情况下，可认为自由电子激光是相干态。如果考虑反冲的影响，则可能得到压缩态，并预计可观测到光子聚束或反聚束效应。本文运用固体理论中的LLP变换重新研究了这个问题，并发展了一种微扰方法予以求解，得到的零阶近似解与文献[1]相似。用这套方法除了可以验证上述结果，还可用于分析电磁波摇摆器等其它情况下的自由电子激光场的光子统计性质。

2　理论计算

选取Bambini-Renieri坐标系[5]，在此坐标系中周期摇摆器磁场转变为与辐射场频率相同但传播方向相反的电磁场。整个体系包括一个电子及两列行波，并将电子看作非相对论电子。其哈密顿量为[1]：

$$H_0 = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + \hbar\omega(a_L^+ a_L + 1/2) + \hbar\omega(a_w^+ a_w + 1/2)$$
$$+ \hbar\Omega[a_L^+ a_w \exp(-2i\hbar kz) + a_w^+ a_L \exp(2i\hbar kz)] \tag{1}$$

式中 m 为电子质量，ω 为新坐标中辐射场及摇摆器磁场频率，并有 $\omega = |k|c$，c 为光速。$\Omega =$

收稿日期：1994年12月29日；收到修改稿日期：1995年6月16日

$2\pi c^2\gamma_0/\omega V$，$\gamma_0$ 为实验室坐标系中电子初始相对论能量因子，V 为相互作用体积，P 为电子动量，$a^+_{L(w)}$、$a_{L(w)}$ 分别为光场(摇摆器场)的产生和湮灭算符。选取幺正变换[6]：

$$U = \exp\,(2ia_L^+ a_L \hbar kz) \tag{2}$$

显然，有下列关系成立：

$$U^- = U^{-1} = \exp\,(-\,2ia_L^+ a_L \hbar kz), \qquad UPU^- = \widetilde{P} - 2\hbar a_L^+ a_L k \tag{3}$$

$$U_{a_L}U^+ = a_L \exp\,(-\,2i\hbar k), \qquad U_{a_L^+}U^+ = a_L^+ \exp\,(2i\hbar k), \tag{4}$$

此幺正变换在固体理论中用于研究极化子，被称为 LLP 变换[6]。值得注意：由于电子动量只在 z 方向变化，(1)式实际上是一维哈密顿量，$\widetilde{P}$ 也可写成：$i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}$ 。经过上述变换后，$\widetilde{P}$ 不再是电子动量算符，而表示电子动量与两倍的辐射场动量之和。由于电子每发射(吸收)一个光子的同时必须吸收(发射)一个摇摆器场的虚光子从而失去(得到)两份动量，因而 $\widetilde{P}$ 是守恒量，记为 P_0。经过 LLP 变换后的哈密顿量为：

$$\begin{aligned} H' &= UH_0U^- \\ &= \frac{(\widetilde{P} - 2\hbar a_L^+ a_L k)^2}{2m} + \hbar\omega(a_L^+ a_L + a_w^+ a_w - 1) + \hbar\Omega[a_L^+ a_w + a_w^+ a_L] \\ &= \frac{P_0^2}{2m} - \frac{4a_L^+ a_L P_0 \hbar k}{2m} + \frac{4a_L^+ a_L(\hbar k)^2}{2m} + \frac{4a_L^+ a_L^+ a_L a_L(\hbar k)^2}{2m} \\ &\quad + \hbar\omega(a_L^+ a_L + a_w^+ a_w + 1) + \hbar\Omega[a_L^+ a_w + a_w^+ a_L] \end{aligned} \tag{5}$$

取海森堡表象求解。令：

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_0^2}{2m} - \frac{4a_L^+ a_L P_0 \hbar k}{2m} + \frac{4a_L^+ a_L(\hbar k)^2}{2m} \\ &\quad + \hbar\omega(a_L^+ a_L + a_w^+ a_w + 1) + \hbar\Omega[a_L^+ a_w + a_w^+ a_L] \end{aligned} \tag{6}$$

$$H_1 = \frac{4a_L^+ a_L^+ a_L a_L(\hbar k)^2}{2m} \tag{7}$$

显然，$H' = H + H_1$。取 $\delta = 2\omega P_0/mc$，$\epsilon = 2\hbar k^2/m$。由于 ϵ 为一小量，故 H_1 相比 H 可视为微扰。首先不考虑 H_1，求解 H。可得 a_L^+ 的海森堡方程为：

$$\dot{a}_L^+ = (i/\hbar)\,[H,\, a_L^+] = i(\omega - \delta + \epsilon)a_L^+ + i\Omega a_w \tag{8}$$

令：$\omega' = \omega - \delta + \epsilon$ 的共轭方程即是 a_L 的海森堡方程。按文献[1]、文献[2]、文献[5] 等作如下近似：因摇摆器磁场强度非常大，意味着 $a_L^+ a_L \ll a_w^+ a_w$。所以可以认为 $a_w^+ a_w$ 是不变常数。此时应有：

$$a_w^+ a_w \simeq A_w^* a_w = n_{v0}, \tag{9}$$

及

$$A_w^* = \sqrt{n_{v0}}\,\exp\,(i\omega t) \tag{10}$$

式中 n_{v0} 是初始时刻 Bambini-Renieri 坐标系中摇摆器磁场转变成的总虚光子数，A_w 是算符 a_w 近似看成可对易 C 数函数时的对应。由于在海森堡表象中，故(10)式引入时间因子。将(10)式代入(9)式后，即可解得：

$$\begin{aligned} a_L^+(t) &= i\Omega\,\sqrt{n_{v0}}\int_0^t \exp\,[i\omega'(t-\beta)]\,\exp\,(i\omega\beta)\,\mathrm{d}\beta + a_L^+(0)\,\exp\,(i\omega' t) \\ &= \Omega_s\,\frac{[1 - \exp\,[i(-\,\delta + \epsilon)t]]}{(\delta - \epsilon)} + a_L^+(0)\,\exp\,(i\omega' t) \\ &= 2\Omega_s\,\frac{i}{(-\,\delta + \epsilon)}\,\sin\,[(-\,\delta + \epsilon)t/2]\,\exp\,[i(-\,\delta + \epsilon)t/2] + a_L^+(0)\,\exp\,(i\omega' t) \end{aligned} \tag{11}$$

式中 $a_L^+(0)$ 为初始时刻海森堡表象下的产生算符，同时也是薛定锷表象内任何时刻的产生算符。上式恰好是量子光学中相干态的形式。令：

$$f^* = 2\Omega_1 \frac{i}{(-\delta+\epsilon)} \sin[(-\delta+\epsilon)t/2] \exp[i(-\delta-\epsilon)t/2] \tag{12}$$

式中 $\Omega_1 = \Omega\sqrt{n_{v0}}\exp(i\omega t)$。为了得到光子计数的信息，须从海森堡表象转到薛定锷表象。两者间的关系由幺正变换 U' 联系。量子光学已给出 U' 的解[7]。U' 可分解为两个幺正算符的乘积，为：

$$\begin{aligned} U' &= \exp[fa_L^+(0) - f^*a_L(0)]\exp[ia_L^+(0)a_L(0)\omega' t] \\ &= \exp(-ff^*/2)\exp[fa_L^+(0)]\exp[-f^*a_L(0)]\exp[ia_L^+(0)a_L(0)\omega' t] \end{aligned} \tag{13}$$

设初始光场为真空态，则在薛定锷表象中波函数可写为：

$$\begin{aligned} |\phi\rangle = U'|\rangle\rangle &= \exp(-ff^*/2)\exp[fa_L^+(0)]\exp(-f^*a_L(0)]\exp[ia_L^+(0)a_L(0)\omega' t]|0\rangle \\ &= \exp(-ff^*/2)\exp fa_L^+(0)|0\rangle = \exp(-ff^*/2)\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{1/l!}\,(f)^l|l\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

式中 $|0\rangle$ 为真空态。因此末态 $|\phi\rangle$ 中光子数为 l 的几率振幅 S_l 和相应的几率 C_l 为：

$$S_l = \exp(-ff^*/2)\sqrt{1/l!}\,f^l, \qquad C_l = (1/l!)\exp(-ff^*)(ff^*)^l \tag{15}$$

如果略去 f 中表示电子动量反冲的小量 ϵ，此结果即是文献[1]中的方程(6)。文献[1]中是在略去整个电子动量的近似下得到此结果。而本文的近似则仅略去了 H' 中的高阶光子耦合项，因此更为准确。

为了更精确地描述自由电子激光场，必须考虑微扰项的作用。为此取薛定锷表象求解 U'。对薛定锷表象，所有产生、湮灭算符均不随时间变化且等于海森堡表象中的初始值。设解可按 ϵ 的幂次展开为：

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \epsilon|\phi'\rangle + \epsilon^2|\phi''\rangle + \cdots \tag{16}$$

上式代入薛定锷方程，并保留到 ϵ 的零级、一级项，则有：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi\rangle = H|\phi\rangle \tag{17}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi'\rangle = H|\phi'\rangle + H^{(1)}|\phi\rangle \tag{18}$$

(18)式两边已经消去 ϵ。其中有 $\epsilon H^{(1)} = H_1 = \hbar\epsilon a_L^{+2}a_L^2$。设有幺正算符 U_1' 满足：

$$|\phi'\rangle = U_1'|\phi(0)\rangle \tag{19}$$

并利用：

$$|\phi\rangle = U'|\phi(0)\rangle \tag{20}$$

上两式都代入(18)式后，可得算符方程：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_1' = HU_1' - H^{(1)}U' \tag{21}$$

令：

$$U_1' = U'V \tag{22}$$

V 也是幺正算符。将此式代入(21)式，化简后得：

$$U' i\hbar\frac{\partial}{\partial t}V = H^{(1)}U' \tag{23}$$

其中用到 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U' = HU'$。上式的解即为：

$$V=\frac{-i}{\hbar}\int_0^t U'^{+}H^{(1)}U'\mathrm{d}\beta$$
$$=-i\int_0^t U'^{-}a_L^{+}a_L^{+}a_La_LU'\ \mathrm{d}\beta \tag{24}$$

积分元 β 实际就是 U' 中的时间变量 t。将 $U'U'^{+}=1$ 插入上式各产生、湮灭算符之间，并利用变换关系[7]：

$$U'^{+}a_L^{+}U'=a_L^{+}\exp(i\omega' t)+f^{*},\qquad U'^{-}a_LU'=a_L\exp(-i\omega' t)+f \tag{25}$$

代入(24)式可得：

$$V=-i\int_0^t(a_L^{+2}\exp(2i\omega'\beta)+2a_L^{-}\exp(i\omega'\beta)f^{*}+f^{*2})$$
$$\times[a_L^2\exp(-2i\omega'\beta)+2a_L\exp(-i\omega'\beta)f+f^2]\,\mathrm{d}\beta \tag{26}$$

上式积出后即解出 V。因此在一般情况下，精确到 ϵ 的一级项，得到任意时刻的光场为：

$$|\psi\rangle=|\phi\rangle+|\phi'\rangle=U'(1+\epsilon V)\ |\phi(0)\rangle \tag{27}$$

类似地处理可得到更高阶的项。通常 ϵ 足够小，一级项已足够精确。这里仍旧讨论一个最重要的特例，即初始光场为真空的情况。此时有：

$$|\psi\rangle=U'(1+\epsilon V)|0\rangle \tag{28}$$

考虑到 $a_L|0\rangle=0$，可以简化(26)式的积分，得：

$$V=-i\int_0^t(a_L^{+2}\exp(2i\omega'\beta)+2a_L^{+}\exp(i\omega'\beta)\ f^{*}+f^{*2})f^2\,\mathrm{d}\beta$$
$$=\frac{1}{\epsilon}\ (a_L^{+2}A+a^{L}B+C) \tag{29}$$

式中 $A=-i\epsilon\int_0^t\exp 2i\omega'\beta)\ f^2\mathrm{d}\beta$，$B=-2i\epsilon\int_0^t\exp(i\omega'\beta)\ f^{*}\ f^2\mathrm{d}\beta$，$C=-i\epsilon\int_0^t f^{*2}f^2\mathrm{d}\beta$。$A$，$B$，$C$ 均不难积出。篇幅所限，这里仅以符号表示它们。将(29)式代入(29)式，得：

$$|\psi\rangle=U'(1+a_L^{+2}A+a_L^{-}B+C)|0\rangle$$
$$=(1+C)U'|0\rangle+BU'|1\rangle+\sqrt{2}\ AU'|2\rangle \tag{30}$$

将 U' 的具体形式代入上式。仍利用 $a_L|0\rangle=0$，因此当 $\exp[-f^{*}a(0)]$ 作用到 $|1\rangle$，$|2\rangle$ 上时只要分别展开到一阶和二阶项。因此有：

$$U'\simeq\exp(-ff^{*}/2)\exp[fa_L^{-}(0)]\ (1-f^{*}a_L+\frac{1}{2}\ f^{*2}a_L^{2})\exp[ia_L^{+}(0)a_L(0)\ \omega' t] \tag{31}$$

上式代入(30)式，设所得解为：

$$|\psi\rangle=\sum_{l=0}^{\infty}D_l|l\rangle \tag{32}$$

其中 D_l 是光子数为 l 的几率振幅。经过计算，D_l 可以由 S_l 表示，结果为：

$$D_l=(1+C+A\ f^{*2}\exp(2i\omega' t)-Bf^{*}\exp(i\omega' t)]S_l$$
$$-\sqrt{n}\ [2Af^{*}\exp(2i\omega' t)-B\exp(i\omega' t)]S_{l-1}$$
$$+\sqrt{n(n-1)}\ A\exp(2i\omega' t)\ S_{l-2} \tag{33}$$

3　讨论及结论

首先补充一点，在 LLP 变换后的表象中，算符 a_k^+ 不仅仅表示动量为 k 的光子的产生算符，而表示产生动量为 k 的光子的同时还带走电子的两份动量。这一点可由幺正变换的特性证明。这意味着 LLP 变换前后的 a_k^+ 之间相差一位相因子 $\exp(2i\hbar kz)$。对算符 a_k 也有类似关系。但本文在上述计算中并未强调这一点。因为本文只讨论光子计数而不关心电子动量状态的变化。在此意义上可认为变换前后的算符是等价的。另外，还须注意求解算符方程的时序问题。本文通过算符的分解(20 式)回避了这一困难。

本文在 LLP 变换下研究了自由电子激光场的光子统计特性。所用的微扰方法有很快的收敛速度，保证了结果的精确性。当忽略反冲时可得到相干态，保留反冲的一阶效应，相干态被破坏的程度由(32)式决定。

参　考　文　献

[1] G. Dattoli, *et. al.*, Proceeding of the 1984 Free Electron Laser Conference Castelgandolfo(Rome)., 1984：93～98

[2] W. Becker, M. S. Zubairy., Photon statistics of a free-electron laser. *Phys. Rev. A.*, 1982, **25**(4)：2200～2201

[3] G. Dattoli, M. Richetta., FEL quantum theory: comments on Glauber coherence, antibunching and squeezing. *Opt. Commun.*, 1984, **50**(3)：165～168

[4] W. Becker, M. O. Sculy, M. S. Zubairy, Generation of squeezed states via a free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **48**(7)：475～477

[5] A. Bambini, A. Renieri, S. Stenholm, Classical theory of the free-electron laser in a moving frame. *Phys. Rev.* (*A*), 1979, **19**(5)：2013～2025

[6] 李正中， 固体理论．高等教育出版社，1985，第八章，297～298

[7] 郭光灿， 量子光学．高等教育出版社，1990，第三章，79～88

[8] P. Bosco, G. Dattli, M. Richetta, Comments on the solution of the spherical Raman-Nath equation. *J. Phys.*, 1984, **A17**(7)：L395～398

[9] P. Bosco, G. Dattli, J. Gallardo, Analysis of the spherical Raman-Nath equation. *J. Phys.*, 1984, **A17**(14)：2739～2742

Perturbation Method for Analysing Free Electron Laser

Cheng Ya　　Chen Jianwen

(*Sahnghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

Liu Chuxiang

(*Department of Physics, Xinjiang Normal University, Wulumuqi* 830053)

(Received 29 December 1994; revised 16 June 1995)

Abstract　The photon statistics in free electron laser fields is analysed by means of LLP transformation in this paper. And the perturbation solution is presented.

Key words　free electron laser,　unitary transformation,.