

摆动器场误差对自由电子激光器 自发辐射谱的影响

胡素兴 傅恩生

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 在考虑平面型摆动器(Wiggler)场误差 $\Delta B(z)$ 的情况下, 求解电子在磁场中运动的洛仑兹(Lorentz)方程, 得到场误差对电子横向速度的改变, 然后作傅里叶变换即为电子自发辐射谱的改变。并讨论了各种场误差对自由电子激光器自发辐射谱的影响, 选择北京自由电子激光器(BFEL)参数, 进行模拟, 最后确定出各种场误差的可接受条件。

关键词 自由电子激光器, 场误差, 自发辐射谱。

1 引 言

关于场误差的研究始于1985年 Kincaid^[1], 得到了一个场误差对自由电子激光谱影响的近似理论, 即用两个泛函数来描述辐射强度损失, 并对此作出了与泛函数预言相符的数值模拟。Vetrovec 分析了场误差导致电子相空间几率密度分散而使自由电子激光器效率减少^[2]。1992年, Goodman 等人提出了测量场误差的解析方法并分析了永久磁铁摆动器的误差^[3]。Hu 等在 UCSB 自由电子激光器上对摆动器场误差引起增益下降进行了计算^[4]。作者也曾在束波相互作用的相空间中分析了随机场误差引起电子溢出相包而导致自由电子激光器效率下降的机理。

本文分析了在波荡器存在场误差 $\Delta B(z)$ 的情况下, 电子的横向运动将发生变化。这一变化直接影响到自由电子激光器的自发辐射谱和增益等。然而由于各种不同的场误差对自由电子激光器运行的影响是各有差异的。因而本文侧重于分析不同种类场误差对自由电子激光器自发辐射谱的影响。文中将摆动器误差分为: 分组场误差, 周期性场误差, 以及随机场误差等。

最后作者选择了北京自由电子激光器参数, 对各种类型场误差进行了自发辐射谱的模拟, 确定出各种场误差的可接受条件。

2 电子在摆动器中的横向运动

设实际的平面型摆动器磁场有如下形式:

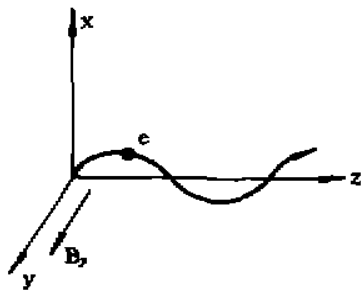


Fig. 1 Frame used throughout this article

$$\begin{cases} B_y(z) = [B_0 + \Delta B(z)] \cos k_w z; \\ B_x = B_z \approx 0 \end{cases}$$

其中 B_0 为常数，是理想摆动器的轴上磁场峰值。摆动器波数 $k_w = 2\pi/\lambda_w$ ， λ_w 是磁场周期，坐标系选择如图 1 所示。在无辐射场的情况下，电子运动的洛仑兹方程为：

$$\gamma m_0 \frac{d\beta}{dt} = -e\beta \times B \quad (1)$$

式中 m_0 为电子静止质量，在无辐射场时，电子能量因子 γ 沿 z 轴是常数。 $\beta = \beta_{\perp} + \beta_{\parallel}$ 是电子的归一化速度矢量，在自由电子激光器中通常 β_{\parallel} 接近 1，因而可以忽略

$\Delta B(z)$ 对它的影响，可认为电子在整个运动过程中 β_{\parallel} 是一常数， $\Delta B(z)$ 只对电子横向运动产生明显影响。

$$\beta_{\perp} = \beta_{\perp 0} + \Delta\beta_{\perp} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式中，并经积分得到横向速度及其变化量，下标带“0”的量均为理想场时的量：

$$\begin{cases} \beta_{\perp 0} = \frac{e\beta_{\parallel} B_0}{\gamma m_0 c k_w} \sin k_w z & (5) \\ \Delta\beta_{\perp} = \frac{e\beta_{\parallel}}{\gamma m_0 c} \int_0^z \Delta B(z') \cos k_w z' dz' & (6) \end{cases}$$

从而得到电子在实际摆动器场中的横向运动速度：

$$\beta_{\perp}(z) = \beta_{\perp 0} + \Delta\beta_{\perp} = \frac{e\beta_{\parallel} B_0}{\gamma m_0 c k_w} \sin k_w z + \frac{e\beta_{\parallel}}{\gamma m_0 c} \int_0^z \Delta B(z') \cos k_w z' dz' \quad (7)$$

3 摆动器中电子的自发辐射谱

对电子运动的横向速度(7)式作傅里叶变换。即可得到自由电子激光器的自发辐射谱^[5]。

即

$$F_0(k_r) = \frac{e\beta_{\parallel} B_0}{\gamma m_0 c k_w} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin k_w z \exp(ik_r z) dz = \frac{e\beta_{\parallel} B_0}{\gamma m_0 c k_w} \frac{1 - \cos k_r L}{k_w + k_r} \quad (8)$$

$$\Delta F(k_r) = \frac{e\beta_{\parallel}}{\gamma m_0 c} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp(ik_r z) \int_0^z \Delta B(z') \cos k_w z' dz' \quad (9)$$

(8)式表示理想场情况下，自由电子激光器的自发辐射谱。(9)式为磁场偏差 $\Delta B(z)$ 对自由电子激光器自发辐射谱的影响，其中 L 为摆动器总长度， k_r 为辐射光波的波数， $\omega_r = k_r c / 2\pi$ 为辐射频率。合并(8)、(9)两式，得到实际场中的自发辐射谱为：

$$\begin{aligned} F(k_r) = F_0(k_r) + \Delta F(k_r) = & \frac{e\beta_{\parallel} B_0}{\gamma m_0 c k_w} \frac{1 - \cos k_r L}{k_w + k_r} \\ & + \frac{e\beta_{\parallel}}{\gamma m_0 c} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp(ik_r z) \int_0^z \Delta B(z') \cos k_w z' dz' \end{aligned} \quad (10)$$

对(8)式求 k_r 的微商，得出理想场的自发辐射谱中心频率 k_{r0} ，考虑到摆动器中辐射的同

步电子, 其能量因子 γ 与辐射光波波数 k 的关系^[6]: $\gamma^2 = (1 + a_w^2)k_r/2k_w$ 。从而得到一超越方程:

$$L \sin k_{s0}L \cdot \gamma(k_w + k_{s0}) = (1 - \cos k_{s0}L) \left(\frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_w(1 + a_w^2)}{2k_{s0}}} \right) \quad (11)$$

选择北京自由电子激光器参数^[3]: $L = 150 \text{ cm}$, $\lambda_w = 3 \text{ cm}$, $N = 50$, $a_w = 0.82$, 电子束能量 $E_e = 25 \text{ MeV}$, 用微机求解这一超越方程, 在(11)式两端相差小于 10^{-4} 的精度下, 得到 $k_{s0} = 5927.536 \text{ cm}^{-1}$, 即辐射的中心频率为 $\omega_{s0} = 2.83019 \times 10^{13} \text{ Hz}$, 对应的波长为 $10.6 \mu\text{m}$ 。

4 几种不同类型场误差对自发辐射谱的影响

4.1 对于由 n 组磁铁组构成的摆动器

可以做到在每一组中磁化或制造带来的误差是恒定的, 这样的摆动器场误差是一个分段式常函数:

$$\Delta B(z) = \begin{cases} \Delta B_1 & 0 \leq z < L/n \\ \Delta B_2 & L/n \leq z \leq 2L/n \\ \vdots & \vdots \\ \Delta B_n & (n-1)L/n \leq z < L \end{cases}$$

式中 n 是构成摆动器的磁铁组数。将 $\Delta B(z)$ 代入方程(10)式, 得到这种情况的自发辐射谱:

$$F(k_s) = \frac{e\beta_{\perp}}{\gamma m_0 c k_w} (B_0 + \Delta B_1 + \Delta B_2 + \dots + \Delta B_n) \frac{1 - \cos k_s L}{k_w + k_s} \quad (12)$$

限制 $|\Delta B_n/B_0| \leq 5\%$ 的情况下, 用微机对 ΔB_n 取随机值, 绘出了分段式随机常数场误差的磁场情况和自发辐射谱特性, 分别如图 2(a)、图 2(b) 所示。从图 2 中可见, 分段式误差分布的磁场并不引起自发辐射谱频移, 只是使谱峰值有所下降, 改变的程度取决于 $\Delta B_1 + \Delta B_2 + \dots + \Delta B_n$ 的大小, 当 $\Delta B_1 + \Delta B_2 + \dots + \Delta B_n = 0$ 时, 这种摆动器场接近于理想场, 本文的随机模拟都是在 20 次以上的运行结果的统计。这一分析为北京自由电子激光器^[7]和意大利 ENEA 自由电子激光器^[8]磁块匹配优化提供了理论依据。

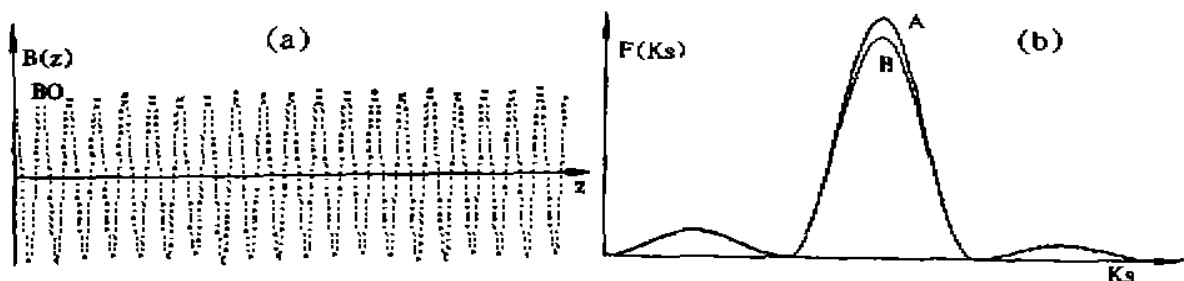


Fig. 2 (a) Magnet field with constant field error,

(b) Spontaneous emission in case, A, ideal field; B, error field

在北京自由电子激光器和 ENEA 的磁块匹配优化中, 他们假设了一组磁块 ΔB 是常数, 这样的很多组磁块组成的摆动器便具有了分段式误差。图 3 和图 4 的匹配优化都是尽量减小 $\Delta B_1 + \Delta B_2 + \dots + \Delta B_n$, 从这两图中可以看到, 匹配的结果是使具有正场误差和负场误差的磁块数接近对称, 这样总的场误差将趋近于 0, 这就是优化的目的。

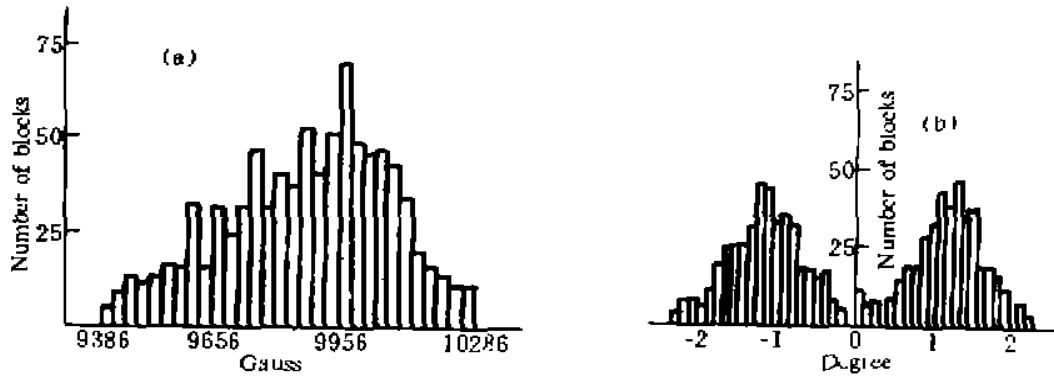


Fig. 3 (a) Distribution of magnetization in the γ -direction, (b) Distribution of the magnetizing angle

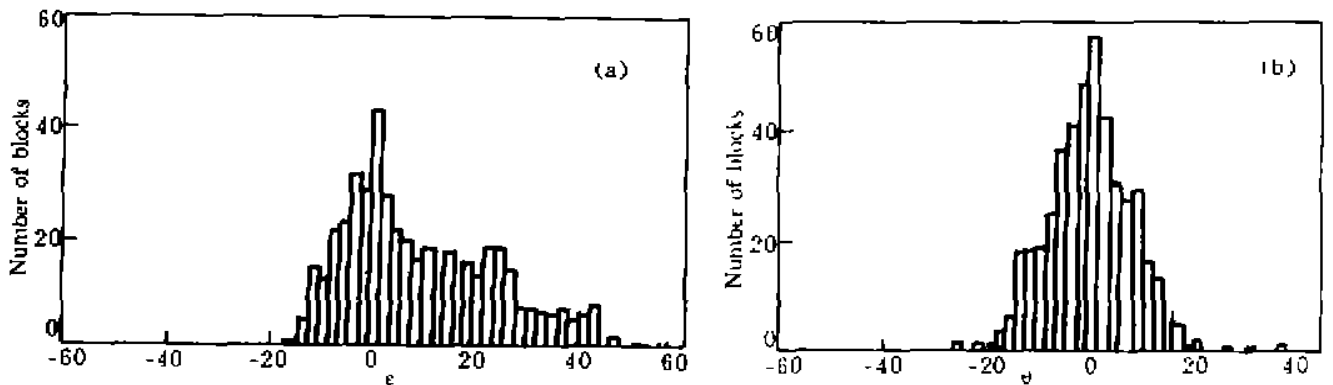


Fig. 4 Angle and amplitude distribution of the 460 magnets utilized in the Frascati-ENEA experiment

(a) relative amplitude distribution (ϵ), (b) angle distribution (θ)

需要说明的是，磁化角度误差也可以折合成场幅误差，因而对角度误差的匹配优化实质上也是对场幅误差的优化。图 3 和图 4 也表明，角度误差的近对称性匹配优化同样使得 $\Delta B_1 + \Delta B_2 + \dots + \Delta B_n$ 减到最小。

4.2 $\Delta B(z)$ 为 z 的周期函数

设
$$\Delta B(z) = \Delta B_n \sin \alpha z \tag{13}$$

式中 ΔB_n 为场误差最大幅值， $\Delta B(z)$ 的周期为 $2\pi/\alpha$ ，将(13)式代入(10)式计算出自发辐射谱：

$$F(k_s) = \frac{e\beta_{\parallel}\beta_0}{\gamma m_0 c k_s} \frac{1 - \cos k_s L}{k_s + k_s} + \frac{e\beta_{\parallel}\Delta\beta_n}{\gamma m_0 c} \left[\frac{1}{\alpha + k_n + k_s} + \frac{1}{\alpha - k_n + k_s} \right] \times [1 - \cos(\alpha + k_s)L] \tag{13}$$

同样选择北京自由电子激光器参数，模拟作图如下。图 5 选择误差同期 $\alpha = L/2$ 。图 6 选择误差周期 $\alpha = 2L/3$ 的情况。从图 5 和图 6 可见：

(1) 当 $\alpha L = 2m\pi$ 时， m 取整数，将不引起自发辐射谱的中心频移，仅是幅度略为下降，模拟时选择 $|\Delta B_n/B_0| \leq 5\%$ 。

(2) 当 $\alpha L \neq 2m\pi$ 时，自发辐射谱不仅幅度下降，而且谱向高频方向略为移动，但在限制 $|\Delta B_n/B_0| \leq 5\%$ 的条件下，场误差的影响并不明显。

(3) 周期性误差会在自发辐射谱的末端引起一个辐射尖峰，这可能是由于场误差周期性地调制了电子在有质动力势阱中的位相造成的。

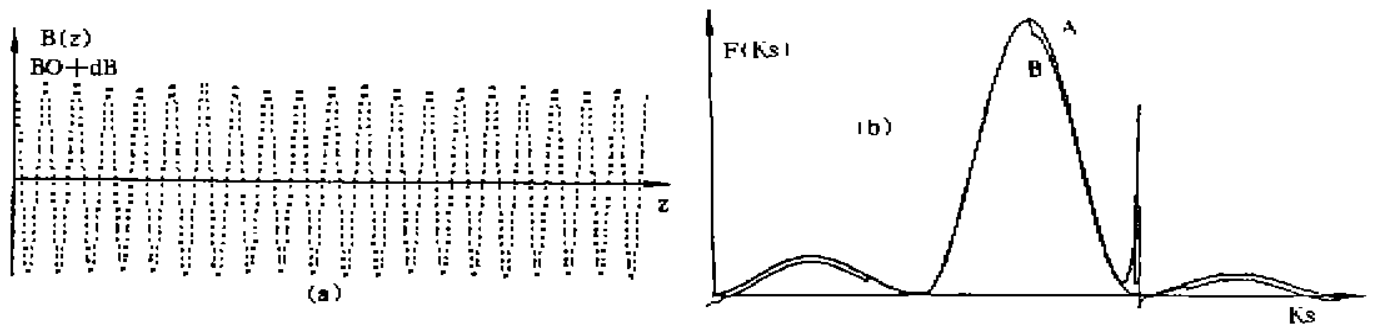


Fig. 5 (a) Magnet field with periodical field error, period $n = L/2$,
 (b) Spontaneous emission in case: A: ideal field, B: periodical field error, period $n = L/2$

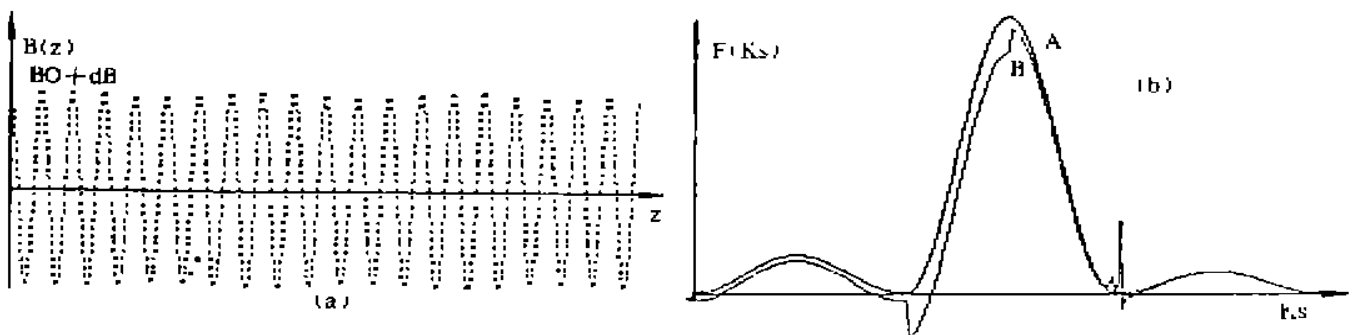


Fig. 6 (a) Magnet field with periodical field error, period $n = 2L/3$,
 (b) Spontaneous emission in case: A: ideal field, B: periodical field error, period $n = 2L/3$

4.3 $\Delta B(z)$ 是 z 的随机函数

(9)式用微机模拟出一定幅度范围的随机值,并考虑到 $z < 0$ 的 $z > L$ 时, $\Delta B(z) = 0$; 因而在 $0 \sim L$ 区间内选取北京自由电子激光器参数积分上式,得到自发辐射谱 $F(k_s)$ 。

如图 7 ~ 图 9 所示。磁场沿 z 轴有随机误差 $\Delta B(z)$ *。

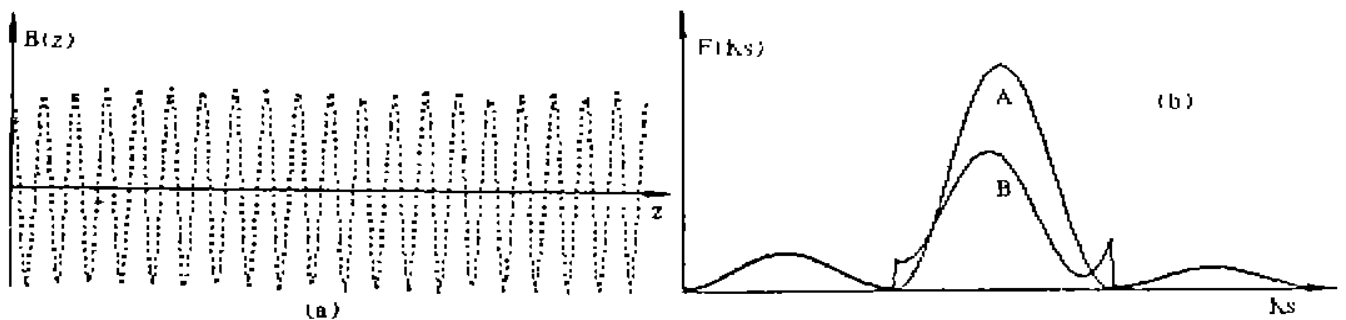


Fig. 7 (a) Magnet field with random field error, $\max \Delta B/B_0 = 5\%$,
 (b) Spontaneous emission in case: A: ideal field, B: random field error, $\max \Delta B/B_0 = 5\%$

图 7 表示 $|\Delta B_m/B_0| \leq 5\%$ 的情况下,场分布及自发辐射谱的特征,从图 7 中可见,自发辐射谱受到这种幅值限制的随机场误差影响很显著。谱明显向低频方向移动。

* 这些模拟都是在 20 次以上的随机运行结果中统计得到的。

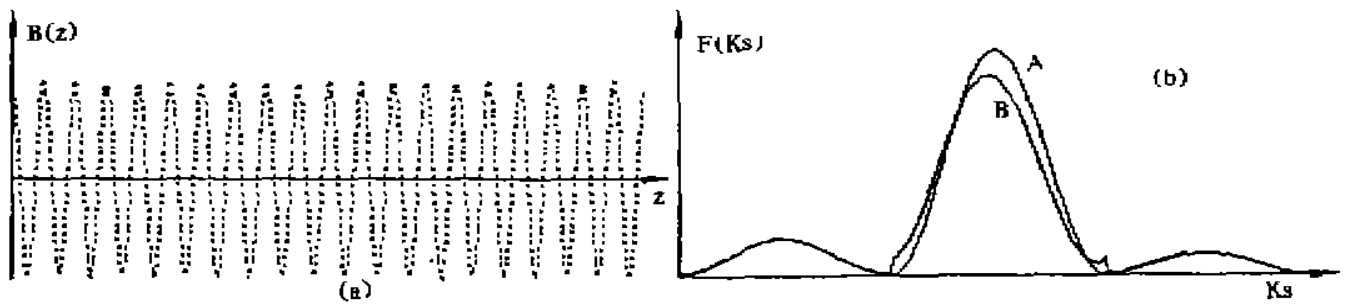


Fig. 8 (a) Magnet field with random field error, $\max \Delta B/B_0 = 3\%$,

(b) Spontaneous emission in case: A, ideal field, B, random field error, $\max \Delta B/B_0 = 3\%$

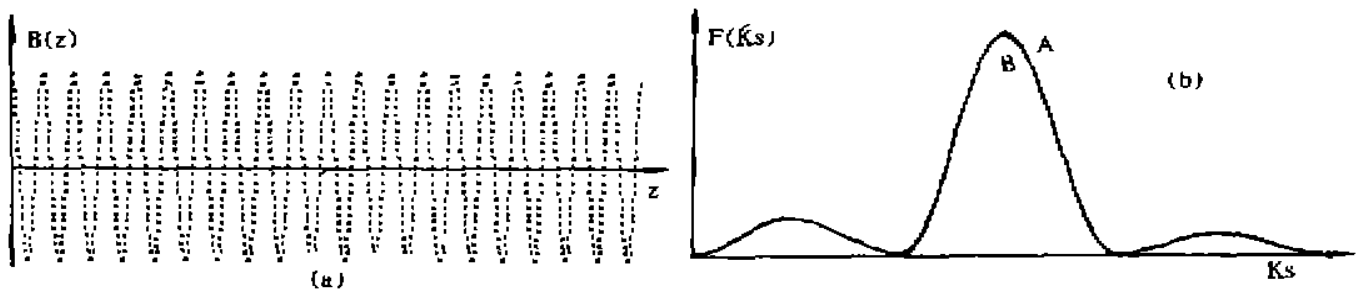


Fig. 9 (a) Magnet field with random field error, $\max \Delta B/B_0 = 1\%$,

(b) Spontaneous emission in case: A, ideal field, B, random field error, $\max \Delta B/B_0 = 1\%$

图 8 表示 $|\Delta B(z)/B_0| \leq 3\%$ 的情况, 从图 8 中看到磁场的随机波有所减小, 自发辐射谱有些下降, 而且谱中心也略为向低频方向移动。

图 9 表示了 $|\Delta B(z)/B_0| \leq 1\%$ 的情况下, 磁场手自发辐射谱的特征, 从图 9 中可以看到谱中心没有发生明显频移, 谱幅度也没有明显下降, 因而可知, 在随机场误差的情况下, 只有 $|\Delta B(z)/B_0| \leq 1\%$ 才是可以接受的, 这与通常要求的摆动器场误差条件 $|\Delta B/B_0| \leq 1\%$ 是一致的。

结 论 本文从电子运动的洛仑兹方程入手, 在考虑场误差 $\Delta B(z)$ 的情况下, 求出了电子横向速度的净变化, 作傅里叶变换积分, 得到自由电子激光器的自发辐射谱, 然后讨论不同类型场误差对自发辐射谱的影响, 并以是否引起中心频移(不超过 1%)和谱峰值下降(不超过 10%)为标准, 确定出各型场误差的可接受条件:

(1) 分段式场误差, 当 $|\Delta B_1 + \Delta B_2 + \dots + \Delta B_n| \leq 10\%$ 。且在 $|\frac{\Delta B(z)}{B_0}| \leq 5\%$ 的条件下, 这种场误差是可接受的。

(2) 周期性场误差, 当 $\alpha L = 2m\pi$ 时, 只要 $|\frac{\Delta B(z)}{B_0}| \leq 5\%$ 这种场误差也是可接受的。

(3) 随机性场误差, 只要 $|\frac{\Delta B(z)}{B_0}| \leq 1\%$ 时, 才是可容忍的, 这加大了对场误差幅值限制, 作者发现, 分段式常数场误差和周期性场误差对自由电子激光器自发辐射谱的影响比随机性场误差小, 与通常要求的场误差条件相比, 分段式常数误差和周性场误差放宽了对误差幅度的严格限制, 本文选取 $|\Delta B(z)/B_0| \leq 5\%$ 模拟显示了这样大的误差幅度都没有给自发辐

射带来严重影响。这给制造和安装摆动器带来了更大的误差容忍余地。

关于设计具有分段式场误差或周期性场误差的摆动器, 作者将另文讨论。

致谢 作者真诚感谢贵州新华激光照排印刷公司陈丽珊小姐对本文投稿论文的编辑和排版。

参 考 文 献

- [1] B. M. Kincaid, Random errors in undulators and their effects on the radiation spectrum. *J. O. S. A.*, 1985, **B2** (8) : 1294~1306
- [2] J. Vetrovec, Performance model for FEL wiggler. *Nucl. Instr. & Meth. Phys. Res.*, 1991, **A304**(1-3) : 759~764
- [3] D. L. Goodman, R. E. Shefer, K. Halbach, Error field measurement and analysis for a pure permanent FEL wiggler. *Nucl. Instr. & Meth. Phys. Res.*, 1992, **A318** : 825~829
- [4] R. C. J. Hu, L. R. Elias, Gain depression due to undulator field errors in the UCSB FEL. *Nucl. Instr. & Meth. Phys. Res.*, 1986, **A250**(1-3) : 120~124
- [5] Hua. BeiJing, L. R. Elias, Analysis of undulator field errors in a compact free electron laser. *Nucl. Instr. & Meth. Phys. Res.*, 1992, **A318**(1-3) : 830~833
- [6] 张世昌, 自由电子激光导论, 成都, 西南交通大学出版社, 1993 : 64
- [7] Xiejialin, Zhuang Fiejia, Wang Youzhi *et al.*, Progress report on the Beijing FEL project. *Nucl. Instr. & Meth. Phys. Res.*, 1990, **A298** : 244~250
- [8] U. Bizzari, F. Ciocci, G. Dattoli *et al.*, The free electron laser; status And perspectives. *La Rivista del Nuovo Cimento*, Vol. 10, No. 5, Editrice Compositori, Bologna, Italy, 1987

Effects of Field in Undulator on the Spontaneous Spectrum of Free Electron Laser

Hu Suxing . Fu Ensheng

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

(Received 17 October 1994; revised 19 June 1995)

Abstract Resolving the Lorentz equation of electron motion in the undulator which has a field error, we obtain the change of transverse velocity of electrons. Through a Fourier transformation, we can find the influence of all kinds of field error in undulator on spontaneous spectrum. Choosing the BFEL parameters, we simulated the effects on FEL spontaneous spectrum due to field errors, and obtained the acceptable condition of all kinds of field errors in undulator.

Key words free electron laser, field error, spontaneous spectrum.