第 16 卷 第 4 期　　光 学 学 报　　Vol. 16, No. 4
1996 年 4 月　　ACTA OPTICA SINICA　　April, 1996

激光在相对论磁化等离子体中的集体散射*

丁荣源　　　　陆全康
（复旦大学出版社，上海 200433）（复旦大学物理系，上海 200433）

摘　要　激光在完全电离等离子体中集体散射截面等于单个电子的汤姆逊散射截面乘以结构因子，结构因子由电子密度涨落确定。在考虑带电粒子间电磁相互作用基础上，给出激光在相对论磁化等离子体中散射的结构因子谱的解析表示式。

关键词　激光散射，　结构因子，　密度涨落。

1　引　　言

随着核聚变研究以及激光和等离子体相互作用研究的发展，认识到相对论等离子体的作用不容忽视。对于非相对论等离子体情况，往往只考虑带电粒子间的库仑相互作用。然而，在相对论等离子体情况，必须把感应电磁场包括在内，即必须考虑带电粒子间的完全电磁相互作用。因库仑势不显含时间，而感 应电磁场显含时间，因而传统的计算方法[1,2]就无法应用。为此，文献[4]发展了计算粒子间相互作用势显含时间的裸粒子格林函数方法。

本文把传统的非相对论等离子体中激光集体散射理论[3]加以推广，计算出了在相对论等离子体中激光集体散射的结构因子，在导出磁化等离子体中的密度涨落的基础上给出了激光在相对论等离子体中集体散射结构因子谱函数的解析式。根据此解析式通过数值计算得出的散射谱，即可与散射实验比较。

2　结构因子谱函数 $S(\boldsymbol{k},\omega)$ 的计算公式

本文把文献[2]给出的非相对论等离子体中激光散射的结构因子谱函数的计算公式推广到相对论等离子体中的情况，以文献[4]给出的相对论 BBGKY 方程链为基础，考虑德拜球内相对论粒子的关联效应[5]，可得出下述计算结构因子的公式：

$$S(\boldsymbol{k},\omega)=\sum_T 2\pi n_T\int \mathrm{d}\,\boldsymbol{p}_T f_T(\boldsymbol{p}_T)\sum_T\left|f_{\alpha T}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_T)+\delta_{\alpha T}g\right|\delta(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_T). \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{u}_T$ 为粒子 T 的速度；而

$$\boldsymbol{p}_T=\frac{m_T\boldsymbol{u}_T}{\sqrt{1-|\boldsymbol{u}_T|^2/c^2}},\qquad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}_s,\qquad \omega=\omega_0-\omega_s. \tag{2}$$

---

* 863 高技术惯性约束聚变专题、国家自然科学基金会、AAATP(亚非等离子体培养协会)和 APSC(中国等离子体研究会)的资助和支持课题。

收稿日期：1995 年 5 月 30 日

"0"和"s"分别表示"入射"和"散射"激光波；n_T 为第 T 种粒子的数密度；$f_T(\boldsymbol{p}_T)$ 为均匀等离子体的动量 $\boldsymbol{p}_T$ 的分布函数；$f_{\alpha T}$ 为裸粒子 T 对第 α 种粒子分布函数引起的密度扰动分布；m_T 与 $\boldsymbol{u}_T$ 为粒子 T 的静质量和速度，$\delta_{\alpha T}$ 为 Kronecker δ 函数；g 为一个裸粒子 T 的密度分布函数 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_T(t))$ 的傅里叶变换像函数。

相对论磁化等离子体中 $f_{\alpha T}(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{p})$ 的解析式的傅里叶变换像函数为($\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 为粒子 α 的动量和位置矢量，t 为时间)：

$$f_{\alpha T}(\boldsymbol{k}, t, \boldsymbol{p}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-4\pi e_T e_\alpha)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{T0}+[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_T]_m^T t)\}$$
$$\times\frac{(-i)^m\exp[ik_\perp a_\alpha\sin\psi - in\psi - im\beta]}{[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_T]_m^T([\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_T]_m^T-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}]_m^\alpha)}A_m^\alpha\cdot\boldsymbol{D}^{-1}\cdot\boldsymbol{I}_m^T. \tag{3}$$

式中

$$\boldsymbol{D}=\frac{k^2c^2}{s^2}\boldsymbol{I}-\frac{c^2}{s^2}kk+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{\sigma}=\sum_\alpha(-n_\alpha e_\alpha^2)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{F}_n}{s+i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}]_m^\alpha},$$

$$\boldsymbol{F}_n=\begin{bmatrix} u_\perp\left(\frac{n\mathrm{J}_n}{k_\perp a_\alpha}\right)^2 V & iu_\perp\left(\frac{n}{k_\perp a_\alpha}\right)\mathrm{J}_n\mathrm{J}_n'V & u_\perp\left(\frac{n}{k_\perp a_\alpha}\right)\mathrm{J}_n^2 W \\ -iu_\perp\left(\frac{n}{k_\perp a_\alpha}\right)\mathrm{J}_n\mathrm{J}_n'V & u_\perp\mathrm{J}_n'^2V & -iu_\perp\mathrm{J}_n\mathrm{J}_n'\mathrm{W} \\ \mathrm{u}_n\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}_\perp\mathrm{a}_\alpha}\right)\mathrm{J}_n^2V & iu_\parallel\mathrm{J}_n\mathrm{J}_n'V & u_\parallel\mathrm{J}_n^2W\end{bmatrix}$$

其中

$$V=\frac{k_\parallel u_\perp}{is}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\parallel}+\left(1-\frac{k_\parallel u_\parallel}{is}\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\perp}, \qquad W=\left(1-\frac{n\Omega_\alpha}{is}\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\parallel}+\frac{n\Omega_\alpha}{is}\frac{u_\parallel}{u_\perp}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\perp},$$

$$a_\alpha=\frac{u_\perp}{\Omega_\alpha}, \qquad \Omega_\alpha=\frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c\gamma_\alpha}, \qquad [\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_T]_m^T=k_\parallel u_{T\parallel}+m\Omega_T, \qquad [\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}]_m^\alpha=k_\parallel u_\parallel+m\Omega_\alpha$$

$$A_m^\alpha=(A_{nx}^\alpha, A_{ny}^\alpha, A_{nz}^\alpha)=\left(V\frac{n}{k_\perp a_\alpha}J_n(k_\perp a_\alpha), iVJ_n'(k_\perp a_\alpha), WJ_n(k_\perp a_\alpha)\right),$$

$$\boldsymbol{I}_m^T=\begin{bmatrix} u_{T\perp}\left(\frac{m}{k_\perp a_T}\right)\mathrm{J}_m(k_\perp a_T) \\ iu_{T\perp}\mathrm{J}_m'(k_\perp a_T) \\ u_{T\parallel}\mathrm{J}_m(k_\perp a_T)\end{bmatrix}.$$

γ_α 为第 α 种粒子的洛伦兹因子，m_α 与 e_α 为第 α 种粒子的静质量和电荷，$\boldsymbol{B}_0$ 为外磁场强度，c 为真空中的光速；$\mathrm{J}_n(k_\perp a_\alpha)$ 和 $\mathrm{J}_m(k_\perp a_\alpha)$ 分别为第 n 和 m 阶贝塞耳函数，而 J_n' 和 J_m' 分别为它们导数；"$\parallel$""$\perp$"分别表示沿外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 方向和垂直于 $\boldsymbol{B}_0$ 方向的分量，如图 1 所示。(3) 式中的 $\beta=\psi-\frac{\pi}{2}$，而 ψ 为 $u_\perp$ 与 x 轴的夹角。

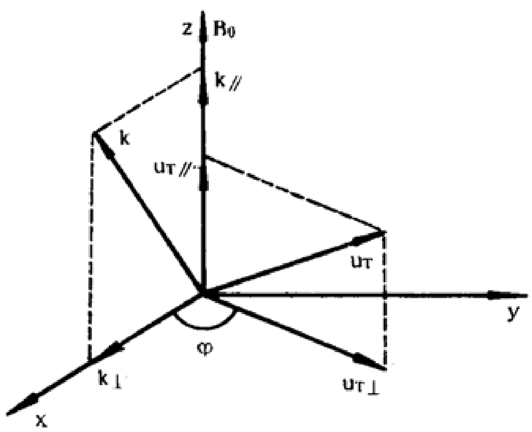

Fig. 1 Coordinate system

3 密度扰动分布和结构因子谱的解析式

将 $f_{\alpha T}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ 对动量 $\boldsymbol{p}$ 积分得到密度扰动分布：

$$f_{\alpha T}(\boldsymbol{r},\ t)=\int \mathrm{d}\boldsymbol{p} f_{\alpha T}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p},\ t). \tag{4}$$

再将(3)式代入(4)式，并利用 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}=p_{\perp}\mathrm{d}p_{\perp}\mathrm{d}p_{\parallel}\mathrm{d}\psi$ 以及

$$\exp\ (ik_{\perp}a_{\alpha}\sin\ \psi)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_{l}(k_{\perp}a_{l})\ \exp\ (il\psi), \tag{5}$$

$$\int_{0}^{2\pi}\exp\ [i(l-n)\psi]\mathrm{d}\psi=\delta_{ln}2\pi, \tag{6}$$

$$f_{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ t)=f_{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{T})\ \exp\ \{-i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{T_0}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{T})_{m}^{T}t]\}, \tag{7}$$

得到

$$f_{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{T})=-\ (4\pi e_{\alpha}e_{T})\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^{m}$$

$$\times\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}_{n}^{\alpha}\cdot\boldsymbol{D}^{-1}\cdot\boldsymbol{I}_{m}^{T}\frac{\exp\ [ik_{\perp}a_{T}\cos\ \beta_{T}-im\beta_{T}]\mathrm{J}_{n}(k_{\perp}a_{\alpha})}{[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{T}]_{m}^{T}([\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{T}]_{m}^{T}-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}]_{n}^{\alpha})}. \tag{8}$$

由裸粒子 T 在外磁场中回旋运动的轨迹：

$$\boldsymbol{r}_{T}(t)=\boldsymbol{r}_{T_0}+\frac{k_{\perp}u_{T\perp}}{\Omega_{T}}\ [\cos\ (\Omega_{T}t+\beta_{T})-\cos\ \beta_{T}]+k_{\parallel}u_{T\parallel}t, \tag{9}$$

式中 $u_{T\perp}$ 和 $u_{T\parallel}$ 为垂直和平行于外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的粒子速度；β_T 为表征初始位置而引入的参数，$\beta_T\equiv\psi_T-\dfrac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{r}_{T_0}$ 为初始位置，由

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{T}(t))=\frac{1}{(2\pi)^{3}}\int \exp\ (i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\ \exp\ (-\ i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{T}(t))\ \mathrm{d}\boldsymbol{k}, \tag{10}$$

$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{T}(t))$ 为一个裸粒子 T 的密度分布函数，得到

$$\exp\ [-\ i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{T}(t)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\ \{-\ i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{T0}-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{T}]_{m}^{T}t)\}g \tag{11}$$

其中

$$g\equiv\exp\ (ik_{\perp}a_{T}\cos\ \beta_{T}-im\beta_{T})(-\ i)^{m}\mathrm{J}_{m}(k_{\perp}a_{T}) \tag{12}$$

引入函数

$$P_{m}^{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ \omega|\boldsymbol{u}_{T})\equiv-\ 4\pi e_{0}e_{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\ \frac{\mathrm{J}_{n}(k_{\perp}a_{\alpha})\boldsymbol{A}_{n}^{\alpha}\cdot\boldsymbol{D}^{-1}\cdot\boldsymbol{I}_{m}^{T}}{\omega(\omega-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}]_{n}^{\alpha})} \tag{13}$$

于是，(7)式由(8)式通过(13)式可写成如下形式：

$$f_{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-\ i)^{m}\exp\ (ik_{\perp}a_{T}\cos\ \beta_{T}-im\beta_{T})P_{m}^{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ \omega|\boldsymbol{u}_{T})$$

$$\times\ \exp[-\ i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{T_0}-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{T}]_{m}^{T}t)]. \tag{14}$$

式中

$$\omega\equiv[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{T}]_{m}^{T}.$$

将(11)和(14)两式相加后得到

$$f_{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ t)+\ \delta_{\alpha T}\exp\ [-\ i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{T}(t)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\ \{-\ i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{T_0}-[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{T}]_{m}^{T}t)\}$$

$$\times\ \exp\ (ik_{\perp}a_{T}\cos\ \beta_{T}-im\beta_{T})(-\ i)^{m}\ [P_{m}^{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ w|\boldsymbol{u}_{T})+\ \delta_{\alpha T}\mathrm{J}_{m}(k_{\perp}a_{T})]. \tag{15}$$

因而，利用(7)和(12)式，就得到公式(1)中所需的函数

$$f_{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_T)+\delta_{\alpha T}g=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\exp\left(ik_\perp a_T\cos\beta_T-im\beta_T\right)$$
$$\times\left[P_m^{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ \omega|\boldsymbol{u}_T)+\delta_{\alpha T}\mathrm{J}_m(k_\perp a_T)\right]. \tag{16}$$

取(16)式的复共轭：

$$\left[f_{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_T)+\delta_{\alpha T}g\right]^*=\sum_{h=-\infty}^{\infty}(i)^h\exp\left(-ik_\perp a_T\cos\beta_T\right)\exp\left(ih\beta_T\right)$$
$$\times\left[P_h^{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ \omega|\boldsymbol{u}_T)+\delta_{\alpha T}\mathrm{J}_h(k_\perp a_T)\right],$$

最后求得结构因子谱函数的解析式为

$$S(\boldsymbol{k},\ \omega)=\sum_T\sum_{m=-\infty}^{\infty}2\pi n_T\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_T f_T(\boldsymbol{p}_T)$$
$$\times\left|P_m^{\alpha T}(\boldsymbol{k},\ \omega|\boldsymbol{u}_T)+\delta_{\alpha T}\mathrm{J}_m(k_\perp a_T)\right|^2\delta(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_T) \tag{17}$$

这是本文的主要结果。通过数值计算，就可得到激光在相对论等离子体中的集体散射谱。与非相对论结果比较，就可得出相对论质量效应和回旋效应对非相对论散射的修正。

参 考 文 献

[1] D. C. Montgomery, D. A. Tidman, *Plasma Kinetic Theory*, New York, MCGraw-Hill, 1964
[2] Q. K. Lu(陆全康), H. Chen(陈虹), W. H. Wang(王文华) *et al.*, Incoherent scattering from a magnetized plasma. *Science in China*, 1987, **A30**(6): 601～606
[3] N. A. Krall, A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, New York, McGraw-Hill, 1973
[4] Q. K. Lu(陆全康), Relativistic nude particale Green function and collison integral. *Science in China*, 1994, **A37**(10): 1241～1252
[5] H. Van Erkelens, W. A. Van Leeuwen, Relativistic boltzman theory for a plasma I, the entropy production. *Physica*, 1977, **89A**(1): 113～126

Collective Scattering of Laser in a Relativistic Magnetized Plasma

Ding Rongyuan Lu Quankang
(*Department of Physics, Fudan University, Shanghai* 200433)
(Received 30 May 1995)

Abstract The cross-section of laser collective scattering in a fully ionized plasma is equal to the Thomson scattering cross-section multiplying a form factor. The form factor is determined by the density fluctuations of electrons. On the basis of the considering electromagnetic interactions between charged particles, an analytic expression of form factor spectrum of laser scattering in a relativistic magnetized plasma is derived.
Key words laser scattering, form factor, density fluctuations.