

任意折射率分布多量子阱 波导的色散方程*

曹庄琪 詹黎 金国良

(上海交通大学应用物理系, 上海 200030)

摘 要 利用转移矩阵技术, 在建立波导芯子区域等效折射率的基础上, 导出了任意折射率多量子阱波导的色散方程, 该方程的数值精度与量子阱数的多少无关。

关键词 多量子阱波导, 色散方程。

1 引 言

任意折射率分布多量子阱波导的分析可采用转移矩阵技术, 只要导出一个周期转移矩阵的迹^[1]或转移矩阵本身^[2], 便可得到电磁波在该结构中传输的色散方程。但上述方法都采用了薄膜近似, 即量子阱的周期 Δ 远小于电磁波的波长 λ 。通常情况下, 砷化镓多量子阱波导的周期约为 10 nm 左右, 而常用光波长在 1 μm 附近。因此, 利用薄膜近似可获得极高的数值精度。但在量子阱数较少或考虑电子波的情况, 薄膜近似不再有效, 因而无法再导出一个周期转移矩阵的迹。通常, 解决这个问题的途径是求助于数值方法^[3,4]。本文避开了矩阵求迹的难题, 使对应每个小区的转移矩阵依次作用于对应边界条件的列矩阵上, 然后采用等效折射率近似, 把量子阱周期的任意折射率分布用一等效折射率代替, 并在此基础上再推导多量子阱波导的色散方程。

为检验本文理论的可靠性, 利用了一对称阶跃折射率分布多量子阱波导的精确分析^[5], 经过数值比较, 表明本文理论克服了薄膜近似的局限性, 在量子阱周期数较多或较少的情况下, 都达到了极高的精度。

2 等效折射率近似

为说明等效折射率近似的实质, 考虑图 1 所示的四层波导的折射率分布, 设 n_0 、 n_s 分别代表覆盖层和衬底的折射率, 厚度为 h_1 和 h_2 的两薄膜层的折射率分别为 n_1 和 n_2 , 且有 $h_1 + h_2 = w$ 。设导波沿 z 方向传播, 传播常数为 β 。则覆盖层和衬底中 TE 模的电场分布可写为:

$$E_y(x) = \begin{cases} A \exp(P_0 x) & (x < 0) \\ B \exp[-P_s(x - h_1 - h_2)] & (x > w) \end{cases} \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1995 年 3 月 18 日

$$\text{式中} \quad P_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}, \quad P_s = (\beta^2 - k_0^2 n_s^2)^{1/2},$$

$k_0 = 2\pi/\lambda$ 为真空波数, λ 为真空光波长。则由转移矩阵技术可得到以下方程:

$$\begin{bmatrix} E_y(w) \\ E'_y(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_2 h_2) & (1/k_2) \sin(k_2 h_2) \\ -k_2 \sin(k_2 h_2) & \cos(k_2 h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_1 h_1) & (1/k_1) \sin(k_1 h_1) \\ -k_1 \sin(k_1 h_1) & \cos(k_1 h_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中一撇(')代表对 x 的一阶导数, 而 k_1 和 k_2 分别为薄膜 1 和薄膜 2 中的横向波数

$$k_1 = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad k_2 = (k_0^2 n_2^2 - \beta^2)^{1/2}.$$

若有 $\beta > k_0 n_2$, 用 ia_2 (i 为虚数单位) 代替 k_2 , 并利用恒等式 $\cos(ia_2 h_2) = \cosh(a_2 h_2)$, $\sin(ia_2 h_2) = i \sinh(a_2 h_2)$, 则(2)式仍然成立。

利用(1)式, 并经过简单的代数运算, (2)式可写成如下的色散方程:

$$P_s + P_2 = 0 \quad (3)$$

式中

$$P_2 = k_2 \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(P_1/k_2) - k_2 h_2], \quad P_1 = k_1 \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(P_0/k_1) - k_1 h_1].$$

若把图 1 所示的四层波导等效成图 2 所示的三层波导, 其中厚度为 w 的芯子层的折射率为 n_e , 则同样可得矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} E_y(w) \\ E'_y(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_e w) & (1/k_e) \sin(k_e w) \\ -k_e \sin(k_e w) & \cos(k_e w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

代入边界条件后, 可得色散方程

$$P_s + P_e = 0. \quad (5)$$

式中

$$P_e = k_e \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(P_0/k_e) - k_e w], \quad k_e = (k_0^2 n_e^2 - \beta^2)^{1/2}.$$

利用(3)、(5)两式, 可得以下等效方程

$$P_2 = P_e. \quad (6)$$

由(6)式可确定 n_1 、 n_2 与等效折射率 n_e 的关系。容易验证, 当 $n_1 = n_2$, 由(6)式可得 $n_e = n_1$ 。

依据相同的原理, 可把一任意多层波导等效成一简单的三层波导

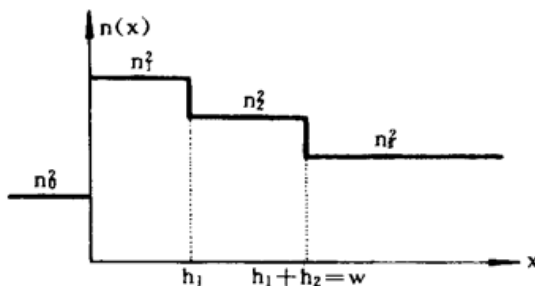


Fig. 1 Refractive index profile of a four-layered waveguides

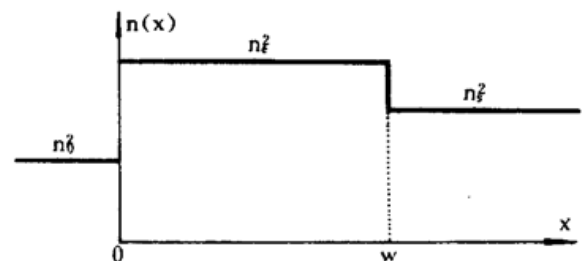


Fig. 2 Refractive index profile of a three-layered waveguide

3 多量子阱波导

任意折射率分布的多量子阱波导如图 3 所示。设多量子阱波导芯子区域的厚度为 w , 包括 N 个周期, 设一个周期的长度为 Λ , 则有 $w = N\Lambda$ 。

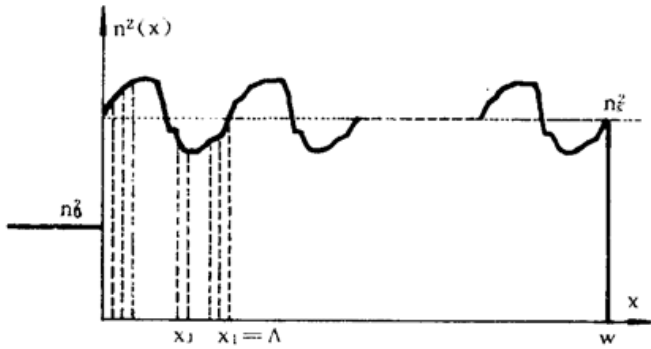


Fig. 3 The MQW waveguide with arbitrary refractive index profile

为利用转移矩阵求解,把周期 Λ 分成 l 等份,每一等份的厚度为 h ,则有 $x_l = l h = \Lambda$ 。

按照 Floquet 定理,只要求出一个周期转移矩阵的迹,就能导出多量子阱波导芯子区域的等效折射率。作用已在薄膜近似下解决了上述问题^[1]。若不采用薄膜近似,目前尚无办法求出一个周期矩阵的迹,为避开这难点,使对应每个小区的转移矩阵依次作用于对应边界条件的列矩阵上,导出多量子阱波导一个周期的等效折射率,再把这一等效折射率

作为整个多量子阱芯子区域的折射率,然后可导出任意折射率分布多量子阱波导的色散方程。

根据转移矩阵理论,对应第 j 个区域的转移矩阵为

$$M_j = \begin{bmatrix} \cos(k_j h) & (1/k_j) \sin(k_j h) \\ -k_j \sin(k_j h) & \cos(k_j h) \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, l), \quad (7)$$

式中 $k_j = [k_0^2 n^2(x_j) - \beta^2]^{1/2}$ 。

使对应一个周期的 l 个转移矩阵依次作用于对应边界 $x = 0$ 处的列矩阵上,即有

$$M_l M_{l-1} \dots M_2 M_1 \begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix} = A \prod_{j=1}^l [\cos(k_j h) + (P_{j-1}/k_j) \sin(k_j h)] \begin{bmatrix} 1 \\ P_1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中

$$P_j = k_j \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(P_{j-1}/k_j) - k_j h], \quad (j = 1, 2, \dots, l)$$

设多量子阱波导一个周期的等效折射率为 n_e ,则有

$$\begin{bmatrix} \cos(k_e \Lambda) & (1/k_e) \sin(k_e \Lambda) \\ -k_e \sin(k_e \Lambda) & \cos(k_e \Lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix} = A [\cos(k_e \Lambda) + \frac{P_0}{k_e} \sin(k_e \Lambda)] \begin{bmatrix} 1 \\ P_e(\Lambda) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式中

$$P_e(\Lambda) = k_e \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(P_0/k_e) - k_e \Lambda]。$$

由(8)和(9)两式,可得确定等效折射率为 n_e 与一个周期折射率分布 $n(x)$ 的关系

$$P_1 = P_e(\Lambda), \quad (10)$$

再把 n_e 作为整个多量子阱波导芯子区域的等效折射率,则有

$$P_e(w) = k_e \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(P_0/k_e) - k_e w]. \quad (11)$$

于是任意折射率分布多量子阱波导的色散方程为

$$P_s + P_e(w) = 0. \quad (12)$$

利用方程(10)、(11)和(12)式可同时确定任意折射率分布多量子阱波导的等效折射率为 n_e 和模折射率 β/k_0 。

4 数值结果

为证明本文所建立理论的可靠性,考虑一个简单的阶跃折射率分布的对称多量子阱波导。这个结构的精确色散关系由 Lenz^[5] 等建立。本文的等效折射率理论与薄膜近似以及精确理论的数值比较由表 1 所示。表中计算的是模折射率 β/k_0 对光波长的依赖关系。所采用的

GaAs/GaAlAs 多量子阱波导如图 4 所示, 典型参数为 $n_0 = 3.30$, $n_1 = 3.50$, $n_2 = 3.20$, $w = NA = 1 \mu\text{m}$, 其中 N 为周期数。

Table 1. Numerical comparison of the different theories

(a) $N = 100$

$\lambda (\mu\text{m})$	β/k_0			$\lambda (\mu\text{m})$	β/k_0		
	exact	thin film approx.	present theory		exact	thin film approx.	present theory
1.00	3.338094	3.338081	3.338094	1.35	3.331893	3.331886	3.331893
1.05	3.337162	3.337150	3.337162	1.40	3.331077	3.331070	3.331077
1.10	3.336243	3.336232	3.336243	1.45	3.330280	3.330274	3.330280
1.15	3.335339	3.335329	3.335339	1.50	3.329502	3.329497	3.329502
1.20	3.334451	3.334442	3.334451	1.55	3.328744	3.328739	3.328744
1.25	3.333580	3.333572	3.333580	1.60	3.328005	3.328000	3.328005
1.30	3.332727	3.332720	3.332727	1.65	3.327285	3.327281	3.327285

(b) $N = 10$

$\lambda (\mu\text{m})$	β/k_0			$\lambda (\mu\text{m})$	β/k_0		
	exact	thin film approx.	present theory		exact	thin film approx.	present theory
1.00	3.339402	3.338112	3.339402	1.35	3.332608	3.331914	3.332608
1.05	3.338350	3.337181	3.338350	1.40	3.331740	3.331098	3.331740
1.10	3.337326	3.336263	3.337326	1.45	3.330896	3.330301	3.330896
1.15	3.336330	3.335360	3.336330	1.50	3.330075	3.329523	3.330075
1.20	3.335361	3.334472	3.335361	1.55	3.329278	3.328765	3.329278
1.25	3.334418	3.333602	3.334418	1.60	3.328503	3.328025	3.328503
1.30	3.333501	3.332749	3.333501	1.65	3.327751	3.327305	3.327751

(c) $N = 5$

$\lambda (\mu\text{m})$	β/k_0			$\lambda (\mu\text{m})$	β/k_0		
	exact	thin film approx.	present theory		exact	thin film approx.	present theory
1.00	3.343437	3.338208	3.343437	1.35	3.334813	3.332002	3.334813
1.05	3.342015	3.337276	3.342015	1.40	3.333784	3.331184	3.333784
1.10	3.340668	3.336357	3.340668	1.45	3.332794	3.330385	3.332794
1.15	3.339388	3.335453	3.339388	1.50	3.331841	3.329605	3.331841
1.20	3.338168	3.334565	3.338168	1.55	3.330924	3.328844	3.330924
1.25	3.337002	3.333693	3.337002	1.60	3.330039	3.328102	3.330039
1.30	3.335885	3.332838	3.335885	1.65	3.329186	3.327380	3.329186

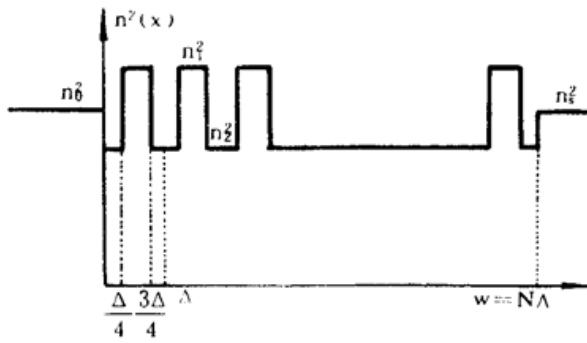


Fig. 4 Refractive index profile of symmetric MQW waveguide

由表 1 可见, 对 $N = 100$, 三种理论都符合得很好, 但对周期数较少的 $N = 10$ 和 $N = 5$, 薄膜近似已有相当的误差, 甚至不再适用, 但等效折射率理论在六位有效数字的情况下, 与精确理论完全符合, 表明本文所建立的理论不仅适用于光波范围, 也可适用于波长较短的电子态。

参 考 文 献

- [1] Zhuangqi Cao, Chun Hu, Guoliang Jin, Method of equivalent refractive indices in multi-quantum-well waveguides with arbitrarily shaped base periods. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1991, 8(12): 2519~2522
- [2] Z. Q. Cao, C. N. Ironside, Dispersion relations of multiple quantum well waveguides with arbitrary index profile base period. *Opt. Commun.*, 1992, 91(3,4): 203~209
- [3] A. K. Ghatak, K. Thagarajam, M. R. Sheoy, A novel matrix approach for solving the multiple quantum well problem. *Thin Solid Films*, 1988, 163: 461~645
- [4] J. Kraus, P. P. Deimel, Calculation of the propagation constant of optical modes in multi-quantum-well structures. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1990, QE-25(5): 824~826
- [5] G. Lenz, J. Salzman, Eigenmodes of multiwaveguide structures. *J. Lightwave Technol.*, 1990, 8(12): 1803~1809

A Novel Formula for Dispersion Properties of MQW Waveguides with Arbitrary Refractive Index Profile

Cao Zhuangqi Zhan Li Jin Guoliang

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030)

(Received 18 March 1995)

Abstract A novel formula for dispersion properties of MQW waveguides with arbitrary refractive index profile, which is based on the transfer matrix technique in the equivalent index approximation, has been developed. It is shown that the numerical accuracy of the formula is independent on the period numbers of the quantum well.

Key words MQW waveguide, dispersion equation.