

光学 CT 中的图像重建算法

高峰 牛憨笨

(中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068)

摘 要 从理论上研究了利用正向模型求解逆问题的迭代算法, 特别是其中 Jacobi 矩阵的有限元解法; 引入了图像恢复领域广泛采用的规则化方法用于处理逆问题中的奇异性问题; 作为总结, 最后给出了 FEM 法求解光学 CT 问题的完整步骤。

关键词 光学断层析像, 有限元方法, 图像重建.

1 引 言

时间分辨光学吸收及散射断层析像 (Time-Resolved Optical Absorption and Scattering Tomography, TOAST), 简称光学 CT, 是近年来国际上新提出的成像技术, 引起了许多学者的重视及研究, Schweiger 等人, 在模型建立及其有限元求解, 重建算法, 以及模拟计算等方面做了大量的研究并取得了重要的成果^[1~6]。在理论研究方面, 有关模型建立及正向问题的有限元求解已得到较完满的解决, 但在图像重建算法方面, 结果不甚令人满意, 尤其是在正向算子的 Jacobi 矩阵的求解问题上, 只提出采用微扰法进行近似求解, 由于组织体内吸收及散射系数是空间位置的函数, 上述微扰法只是一个广义的变分问题, 因此如何进行“微扰”是一个需要明确解决的问题。本文通过将组织体参数用有限元展开, 进而将组织参数微扰及求解问题转变为展开系数的微扰及求解问题, 从而给出数学上较为严格的逆问题的求解步骤。

2 成像系统原理及正向与逆向问题

光学 CT 成像系统的原理如图 1 所示。设 Ω 为被监组织体, 皮秒脉冲激光器产生的超短激光脉冲由传输光纤作用于组织体表面的一个小面积 (近似为一点) 上, 因此源分布 $q_0(\mathbf{r}, t)$ 可近似表示为时空上 δ 函数, 该激光脉冲在组织体内产生时变的光子密度 $\Phi(\mathbf{r}, t)$, 组织体表面某点相应的光流量 $\Gamma(\xi, t)$ ^[6] 由检测光纤接收并输入到时间分辨器件中, 通过分别对 S 个不同源点 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ 作用下 N 个不同检测点 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ 的测量, 可得到一组 $S \times N$ 个检测数据

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \{M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(s)}\} \\ M^{(j)} &= [M^{(j)}(\xi_1), M^{(j)}(\xi_2), \dots, M^{(j)}(\xi_N)]^T \end{aligned} \quad (1)$$

显然, \mathbf{M} 为 $N \times S$ 阶矩阵。实际应用中通常使用时间点扩展函数的导出特性作为检测数据。通常使用的导出特性包括: 积分流量强度、时间加权强度、平均飞行时间、对数强度、高阶时

间矩等^[6]。

光学 CT 中的正向问题定义为: 已知组织体表面各点之光源分布 $\mathbf{q} = [q(\xi_1, t), q(\xi_2, t), \dots, q(\xi_n, t)]^T$ 及内部参数分布 $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = [\mu_a(\mathbf{r}), \mu_s(\mathbf{r})]^T$, 求给定模型下的测量结果 \mathbf{M} 。正向问题可表示为下列算子形式

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}[\mathbf{p}] \quad (2)$$

逆向问题定义为: 已知组织体表面各点之光源分布 \mathbf{q} 及表面各点测量值 \mathbf{M} , 求给定模型的参数分布 $\mathbf{p}(\mathbf{r})$ 。逆向问题的算子表示形式为

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{M}] \quad (3)$$

图像的重建过程等价于逆问题的求解, 常用的利用正向模型的逆问题求解过程为: 1) 选择参数 $\mathbf{p}'(\mathbf{r})$ 作为问题解 $\mathbf{p}(\mathbf{r})$ 的估计值求解 $\mathbf{M}' = \mathbf{F}[\mathbf{p}'(\mathbf{r})]$ 作为测量估计值; 2) 建立平方误差范数 $\|\mathbf{M} - \mathbf{M}'\|^2$ 作为估计值 \mathbf{M}' 与实际测量值 \mathbf{M} 之间的“距离”; 3) 修正估计值 $\mathbf{p}(\mathbf{r}) + \Delta\mathbf{p}'(\mathbf{r})$, 使误差范数达到极小。

3 光子传输模型及正向问题的 FEM 解法^[6]

两种方法可用来模拟光子在组织体内的传输: 单光子作用的离散模型及基于微分方程近似的连续模型。前者即常用 Monte Carlo 法, 虽然该方法在模拟任意几何形状及参数分布组织体内光子传输行为方面具有广泛适应性, 但计算量巨大; 后者采用扩散方程, 它是大气物理中辐射传输方程或中子传输理论中线性输运方程的 P_1 近似^[6], 可表示如下:

$$\{\nabla \cdot \kappa(\mathbf{r}) \nabla - \mu_a(\mathbf{r})c - \partial/\partial t\} \Phi(\mathbf{r}, t) = -q_0(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

$$\kappa(\mathbf{r}) = c/3[\mu_a(\mathbf{r}) + (1 + \bar{f})\mu_s(\mathbf{r})] \quad (5)$$

式中 $\kappa(\mathbf{r})$ 称扩散系数, \bar{f} 为散射分布的平均余弦值 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 为光子密度, 鉴于(5)式, 以下讨论将以 $\kappa(\mathbf{r})$ 及 $\mu(\mathbf{r}) [= \mu_a(\mathbf{r})]$ 作为欲求参数。同时, 为应用扩散方程方便起见, 作两点假设: 1) 设源 $q(\mathbf{r}, t)$ 是同性的, 且为时空上的 δ 函数; 2) 在组织体 Ω 的表面 $\partial\Omega$ 上, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 满足 Dirichlet 条件 $\Phi(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} = 0$ 。

应用 FEM 正向求解模型方程(4), 首先应将组织体 Ω 分为 L 个互不相交的元素 $\omega_i (i = 1, \dots, L)$, 这些元素联结于 D 个顶点 $N_i (i = 1, \dots, D)$ 上。于是方程(4)的解可由片断连续多项式级数展开近似表示为^[7]。

$$\Phi^a(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^D h_i(t) g_i(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(t)^T \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

式中 $\mathbf{h}(t) = [h_1(t), \dots, h_D(t)]^T$, $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = [g_1(\mathbf{r}), \dots, g_D(\mathbf{r})]^T$ 分别为基函数和结点变量。在 FEM 解决实际问题时, 若难于找相应泛函数关系, 通常采用加权余量法代替经典的变分方法, 其中 Galerkin 法能够有效地解决方程(4)这样依赖时间的非线性问题^[7], 关于光学 CT 正向问题的 Galerkin 解详见文献[6]。

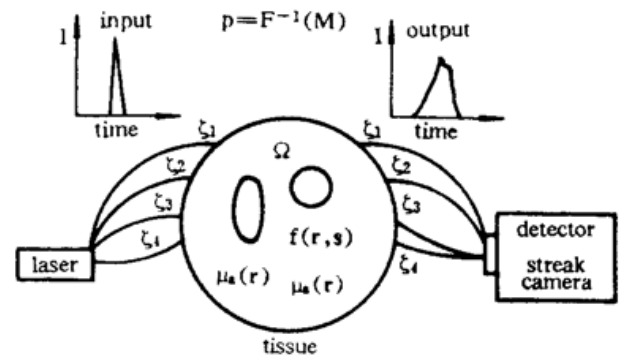


Fig. 1 Principle of NIR imaging system

4 图像重建算法逆问题的解

如前所述, 最常用的非线性逆问题求解方法是基于平方误差范数准则的优化问题, 为

此, 将方程(2)右边在初始参数值 \mathbf{p}_0 ($\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}$) 附近用泰勒(Taylor)级数展开, 即

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{p}_0)\delta\mathbf{p} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ 称为正向算子 \mathbf{F} 的 Jacobi 矩阵, 即

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{p})}{\partial \mu}, \frac{\partial F_1(\mathbf{p})}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{p})}{\partial \mu}, \frac{\partial F_2(\mathbf{p})}{\partial \kappa} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{s,N}(\mathbf{p})}{\partial \mu}, \frac{\partial F_{s,N}(\mathbf{p})}{\partial \kappa} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \delta\mu \\ \delta\kappa \end{bmatrix} \quad (8)$$

设 $\mathbf{M}_d = [M_1, M_2, \dots, M_{s,N}]^T$ 为实际测量值, 于是逆问题为求解 $\delta\mathbf{p}$ 使下式极小化的优化问题

$$\begin{aligned} \text{Min} \Psi(\delta\mathbf{p}) &= \|\mathbf{M}_d - \mathbf{F}(\mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p})\|^2 \simeq \|\mathbf{M}_d - \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) - \mathbf{J}\delta\mathbf{p}\|^2 \\ &= [\mathbf{M}_d - \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) - \mathbf{J}\delta\mathbf{p}]^T [\mathbf{M}_d - \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) - \mathbf{J}\delta\mathbf{p}] \end{aligned} \quad (9)$$

于是得下列多维 Netown-Raphson 迭代法

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + [\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{p}_k)]^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{p}_k)^T [\mathbf{M}_d - \mathbf{F}(\mathbf{p}_k)] \quad (10)$$

5 正向算子 Jacobi 矩阵的 FEM 解法

将组织体参数以有限元展开

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \mu(\mathbf{r}) \\ \kappa(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & g(\mathbf{r}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & g(\mathbf{r}) \end{bmatrix}^T \mathbf{p} \quad (11)$$

其中 $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_D]^T$, $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_D]^T$, $\mathbf{p} = [m \ k]^T$ 。于是(7)式可写为

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{G}(\mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}) \simeq \mathbf{G}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{p}_0)\delta\mathbf{p} \quad (12)$$

这里正向算子 $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{p}) &= \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{p})}{\partial m} & \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{p})}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1(\mathbf{p})}{\partial m_1} & \frac{\partial G_1(\mathbf{p})}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial G_1(\mathbf{p})}{\partial m_D} & \frac{\partial G_1(\mathbf{p})}{\partial \kappa_1} & \frac{\partial G_1(\mathbf{p})}{\partial \kappa_2} & \dots & \frac{\partial G_1(\mathbf{p})}{\partial \kappa_D} \\ \frac{\partial G_2(\mathbf{p})}{\partial m_1} & \frac{\partial G_2(\mathbf{p})}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial G_2(\mathbf{p})}{\partial m_D} & \frac{\partial G_2(\mathbf{p})}{\partial \kappa_1} & \frac{\partial G_2(\mathbf{p})}{\partial \kappa_2} & \dots & \frac{\partial G_2(\mathbf{p})}{\partial \kappa_D} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial G_{SN}(\mathbf{p})}{\partial m_1} & \frac{\partial G_{SN}(\mathbf{p})}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial G_{SN}(\mathbf{p})}{\partial m_D} & \frac{\partial G_{SN}(\mathbf{p})}{\partial \kappa_1} & \frac{\partial G_{SN}(\mathbf{p})}{\partial \kappa_2} & \dots & \frac{\partial G_{SN}(\mathbf{p})}{\partial \kappa_D} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

为推导 Jacobi 矩阵的元素, 设微扰为 $\{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \delta\mathbf{p} (\mu \rightarrow \mu + \delta\mu, \kappa \rightarrow \kappa + \delta\kappa), \Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi\}$, 代入方程(4)展开并忽略二阶项得

$$\left\{ \nabla \cdot \kappa(\mathbf{r}) \nabla - \mu(\mathbf{r})c - \frac{\partial}{\partial t} \right\} \delta\Phi(\mathbf{r}, t) = - \left\{ \nabla \cdot \delta\kappa(\mathbf{r}) \nabla - \delta\mu(\mathbf{r})c - \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (14)$$

将 $\delta\Phi(\mathbf{r}, t)$ 展开为片段连续多项式级数

$$\delta\Phi^d(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^D \delta h_i(t) g_i(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{h}(t)^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (15)$$

其中 $\delta \mathbf{h}(t) = [\delta h_1, \delta h_2, \dots, \delta h_D(t)]^T$ 。于是有

$$\{K[\kappa(\mathbf{r})] + C[\mu(\mathbf{r})c]\} \delta \mathbf{h}' = - \{K[\delta\kappa(\mathbf{r})] + C[\delta\mu(\mathbf{r})c]\} \mathbf{h}' \quad (16)$$

$$\text{及 } \{K[\kappa(\mathbf{r})] + C[\mu(\mathbf{r})]c\} \delta \mathbf{h}(t) + B \frac{\partial \delta \mathbf{h}(t)}{\partial x} = - \{K[\delta \kappa(\mathbf{r})] + C[\delta \mu(\mathbf{r})]c\} \mathbf{h}(t) \quad (17)$$

其中 $\delta \mathbf{h}(t)' = [\delta h_1, \delta h_2, \dots, \delta h_D]^T$, $\delta h_i = \int \delta h_i(t) dt$ 。与正向问题的求解过程类似^[6], 得递归方程

$$\{K[\kappa(\mathbf{r})] + C[\mu(\mathbf{r})]\} \int t^n \delta \mathbf{h}(t) dt + nB \int t^{n-1} \delta \mathbf{h}(t) dt = - \{K[\delta \kappa(\mathbf{r})] + C[\delta \mu(\mathbf{r})]c\} \int t^n \mathbf{h}(t) dt \quad (18)$$

于是, 高阶时间矩微扰量的求解步骤为:

1) 解正向模型求得 $\mathbf{h}' = \int \mathbf{h}(t) dt$ ^[6], 然后求解方程(16)得 $\delta \mathbf{h}' = \int \delta \mathbf{h}(t) dt$, 由此 $\delta E(\xi) = -\kappa(\xi) \sum_{i=1}^D \int \delta h_i(t) dt n_0 \nabla g_i(\xi) = -\kappa(\xi) \sum_{i=1}^D \delta h_i' n_0 \nabla g_i(\xi)$ 。

2) 设 $n = 1$;

3) 解正向模型求得 $\int t^n \mathbf{h}(t) dt$ ^[6];

4) 解递归方程(18)得 $\int t^n \delta \mathbf{h}(t) dt$, 于是 $\delta T^n(\xi) = -\kappa(\xi) \sum_{i=1}^D \int t^n \delta h_i(t) dt n_0 \nabla g_i(\xi)$ 。

5) 于是高阶时间矩的微扰量为

$$\delta \langle t^n \rangle(\xi) = \frac{T^n(\xi) + \delta T^n(\xi)}{E(\xi) + \delta E(\xi)} - \frac{T^n(\xi)}{E(\xi)} \cong \frac{E(\xi) \delta T^n(\xi) - T^n(\xi) \delta E(\xi)}{E(\xi)^2} \quad (19)$$

因此, $F(\mathbf{p})$ 的 Jacobi 矩阵的元素可由下式计算:

$$\begin{cases} \frac{\partial G_i(\mathbf{p})}{\partial \mu_j} = \frac{\partial F_i(\mathbf{p})}{\partial \mu(N_j)} g_j(N_j) \cong \frac{\delta F_i(\mathbf{p} + \delta \mathbf{p})}{\delta \mu(N_j)} g_j(N_j) = \frac{\delta \langle t^n \rangle(\xi)}{\delta \mu(N_j)} g_j(N_j) \\ \frac{\partial G_i(\mathbf{p})}{\partial \kappa_j} = \frac{\partial F_i(\mathbf{p})}{\partial \kappa(N_j)} g_j(N_j) \cong \frac{\delta F_i(\mathbf{p} + \delta \mathbf{p})}{\delta \kappa(N_j)} g_j(N_j) = \frac{\delta \langle t^n \rangle(\xi)}{\delta \kappa(N_j)} g_j(N_j) \\ i = 1, 2, \dots, SN, j = 1, 2, \dots, D \end{cases} \quad (20)$$

6 逆问题的规则化迭代算法

实际计算中, 由于正向算子 Jacobi 矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ 或 $\mathbf{J}\mathbf{p}$ 的病态特性^[6]以及测量中不可避免的噪声干扰, 意味着逆问题不可由(10)式直接求得。根据 Jacobi 矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ 伪逆(一般逆)^[10]的定义和矩阵的奇异值分解(SVD)原理^[10], 方程(12)的解可表示为

$$\delta \mathbf{p} = \sum_{i=1}^R \lambda_i^{-1/2} \{ \mathbf{u}_i^T [\mathbf{M}_0 - \mathbf{G}(\mathbf{p}_0)] \} \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^R \lambda_i^{-1/2} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{n}) \mathbf{v}_i \quad (21)$$

其中 \mathbf{n} 表示噪声项, $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ 分别为 $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ 和 $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ 的第 i 个特性矢量 R 为矩阵 \mathbf{J} 的秩; $\lambda_i^{-1/2}$ 为 \mathbf{J} 的奇异值(SV)。上式右边第一项代表矢量 $\mathbf{M}_0 - \mathbf{G}(\mathbf{p}_0)$ 的奇异值展开, 而第二项为与噪声相关的项^[8~10]。由于 Jacobi 矩阵 \mathbf{J} 的病状特性在此表现为某些 SVD 值 $\lambda_i^{1/2} (i > j)$ 接于零点, 于是, 造成上式右边第二项噪声被放大, (12)式的解 $\delta \mathbf{p}$ 严重偏离其真解, 为避免此现象出现, 在求解方程(12)式时应采用某些规则化(Reglarization)方法。

规则化的目的是将一个病态问题转化为一个良态问题, 且该良态问题的解为原病态问题解的合理近似。目前通常采用的代数方程规则化方法是 Tikhonov-Miller 法^[9,10]。对逆问题(12)的求解, 该方法要求

$$\Psi'(\delta \mathbf{p}) = \| (\mathbf{M}_0 - \mathbf{G}(\mathbf{p}_0) - \mathbf{J}(\mathbf{p}_0) \delta \mathbf{p}) \|^2 + \alpha \| R \delta \mathbf{p} \|^2 \leq 2\epsilon^2 \quad (22)$$

其中 $\alpha = \epsilon^2/E^2$ 。上式的一个合理解为极小化 $\Psi'(\delta \mathbf{p})$ 之 $\delta \mathbf{p}$ 值, 即

$$[J(\mathbf{p}_0)^T J(\mathbf{p}_0)] + \alpha R^T R \delta p = J(\mathbf{p}_0)^T [M_d - G(\mathbf{p}_0)] \quad (23)$$

若选择 R 使 $R^T R$ 与 $J^T J$ 互易, 即两者具有相同特征矢量, 则上式之解可用奇异值分解

$$\delta p = \sum_{i=1}^R \frac{\lambda_i^{1/2}}{\lambda_i + \alpha \mu_i} \{u_i^T [M_d - G(\mathbf{p}_0)]\} v_i + \sum_{i=1}^R \frac{\lambda_i^{1/2}}{\lambda_i + \alpha \mu_i} (u_i^T \mathbf{n}) v_i \quad (24)$$

式中 $\mu_i^{1/2}$ ($i=1, \dots, R$) 为 R 的奇异值。显然规则化矩阵 R 应如下选择: 即不改变原 J 中大奇异值, 将原 J 中小奇异值移出零点附近。由于噪声具有高频特性, 因此通常选择 R 为高通滤波器, 如 Laplace 滤波器^[11]。规则化参数 α 的选择应在规则化误差与噪声放大误差之间求得平衡。实际计算中 α 的选择通过迭代过程逐步确定, 称为 Levenberg-Marquart 算法^[6] (这里 $R = I$)

为了避免矩阵求逆, 可采用迭代法求解(23)式。根据最速下降法原理, (23)式的迭代解 δp_k 可写为:

$$\begin{aligned} \delta p_{k+1} &= \delta p_k + \beta \nabla \Psi'(\delta p) |_{\delta p_k} \\ &= (I - \alpha \beta R^T R) \delta p_k + \beta J(\mathbf{p}_k)^T [M_d - G(\mathbf{p}_k) - J(\mathbf{p}_k) \delta p_k] \end{aligned} \quad (25)$$

为保证收敛, β 应满足: $0 < \beta < 2/|\rho_{\max}|$, $\rho_{\max} = \text{Max}(\lambda_i + \alpha \mu_i)$, (25)式称 Tikhonov-Miller 迭代算法。迭代解优点包括: 监视解的过程, 将有关解的先验知识用于控制噪声的影响^[8]。

综上所述, FEM 求解光学 CT 问题步骤可总结如下:

- 1) 划分组织体 Ω , 构造基函数 $g_i(\mathbf{r})$ ($i=1, \dots, D$)。
- 2) 设初始参数值 $\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = (m_{10}, m_{20}, \dots, m_{D0}, k_{10}, k_{20}, \dots, k_{D0})^T$,
参数微扰值 $\delta \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = (\delta m_1, \delta m_2, \dots, \delta m_D, \delta k_1, \delta k_2, \dots, \delta k_D)^T$ 。
- 3) 设迭代变量 $k=0$, α 为初始值。

Repeat For [每个源及测量位置(分别由 ξ 及 ξ 代表)] Begin

- 4) 对 $p_k(\mathbf{r})$, 解正向模型^[6]得 \mathbf{h}' 。
- 5) 对每个 δm_i 及 δk_i , $i=1, 2, \dots, D$, 求解方程(16)得 $\delta \mathbf{h}'$ 。
- 6) 计算 $E(\xi) = -\kappa(\xi) \sum_{i=1}^D \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla g_i(\xi)$, $\delta E(\xi) = -\kappa(\xi) \sum_{i=1}^D \delta \mathbf{h}'_i \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla g_i(\xi)$,
- 7) 设 $n=1$ 。

Repeat

- 8) 分别解正向模型递归方程^[6]及方程(18)分别得 $\int t^n \mathbf{h}(t) dt$, $\int t^n \delta \mathbf{h}(t) dt$ 。
- 9) $n = n + 1$

Until (n 达到所需之值)。

- 10) 分别计算 $T^n(\xi) = -\kappa(\xi) \sum_{i=1}^D \int t^n \mathbf{h}_i(t) dt \mathbf{n} \cdot \nabla g_i(\xi)$, $\delta T^n(\xi) = -\kappa(\xi) \sum_{i=1}^D \int t^n \delta \mathbf{h}_i(t) dt \mathbf{n} \cdot \nabla g_i(\xi)$ 。

- 11) 由式(18)及(20)计算 Jacobi 矩阵 $J(\mathbf{p}_k)$ 。

end

12) 对固定规则化系数 α , 采用 Tikhonov-Miller 规则化迭代法(25)式求解方程(12)得 \mathbf{p}_k 之修正值 $\Delta \mathbf{p}_k$ 。

- 13) $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{p}_k$ 。
- 14) 计算余量 $r_k = \|M_d - G(\mathbf{p}_{k+1})\|^2$ 。
- 15) 若 $r_k \geq r_{k-1}$ 则增加 α , 从 12) 重新计算。
- 16) $k = k + 1$ 。

Until (τ_k 足够小)。

结 论 本文从理论上研究了利用光学 CT 正向模型求解逆问题的迭代解法, 特别是研究了其中 Jacobi 矩阵的有限元解法, 引入了图像复原技术中广泛采用的规则化方法处理了逆问题中的奇异问题, 最后给出 FEM 法求解光学 CT 问题的完整步骤。

这里需要指出, Jacobi 矩阵的伪逆(21)存在的必要条件是: J 的行数大于其列数, 在本问题中, 该条件要求测量点数多于有限元分割的节点数, 因而实际中很难保证, 一个有效的解决方法是: 将全部节点分为多个节点组, 每次计算只对一个节点组进行, 另外我们只讨论了测量中随机误差的影响及其解决方法, 而未考虑泰勒级数展开时引起的系统误差, 因而上述解中仍包括系统误差的影响。

本文仅涉及光学 CT 有限元解的理论问题, 实验及计算模拟, 将在以后的文章中给出。

参 考 文 献

- [1] S. R. Arridge, M. Schweiger, M. Hiraoka *et al.*, Performance of an iterative reconstruction algorithm for near infrared absorption and scatter imaging. *Proc. SPIE*, 1993, **1888**: 360~371
- [2] M. Schweiger, S. R. Arridge, M. Hiraoka *et al.*, Comparison of a finite element forward model with experimental phantom results; application to image reconstruction. *Proc. SPIE*, 1993, **1888**: 179~190
- [3] S. R. Arridge, M. Schweiger, The use of multiple data types in time resolved optical absorption and scattering tomography (TOAST). *Proc. SPIE*, 1993, **2035**: 256~268
- [4] S. R. Arridge, M. Schweiger, D. T. Depty, Iterative reconstruction of near infra-red absorption images. *Proc. SPIE*, 1992, **1767**: 372~383
- [5] M. Schweiger, S. R. Arridge, M. Hiraoka *et al.*, Application of the finite element method for the forward model in infra-red absorption imaging. *Proc. SPIE*, 1992, **1768**: 97~108
- [6] M. Schweiger, S. R. Arridge, D. T. Depty, Application of the Finite-Element Method for the Forward and Inverse Models in Optical Tomography. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 3, 1993: 263~283
- [7] A. J. Davies, *The Finite Element Method; a First Approach*, Oxford University Press, 1980: 78~86
- [8] A. K. Katsaggelos, J. Biemond, E. W. Schafer *et al.*, A Regularized iterative image restoration algorithm, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1991, **SP-39**(4): 914~929
- [9] R. L. Lagendijk, Iterative identification and restoration of images, *Ph. D Thesis, Delft University of Technology*, 1990: 31~70
- [10] W. K. Pratt, *Digital Image Processing*, New York, John Wiley, 1978
- [11] R. C. Gonzalez, R. E. Woods, *Digital Image Processing*, Addison Wesley, 1992: 282~289

Image Reconstruction Algorithm in Optical CT

Gao Feng Niu Hanben

(Xian Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xian 710068)

(Received 31 January 1995; revised 15 May 1995)

Abstract In this paper, the iterative algorithm for the inverse problem solution of optical CT. Using the forward model is studied in detail, with special emphasis on the FEM solution for Jacobian of the forward operator. The regularization method that has been widely used in image restoration is adopted for solving ill-conditionness of the inverse problem. Finally, the complete strategy for the FEM solution to the optical tomography is given as a conclusion.

Key words optical tomography, finite element method (FEM), image reconstruction.