

泰伯效应的共轭现象

郑光昭

(广东工业大学五山校区基础部, 广州 510643)

摘 要 介绍了观察泰伯(Talbot)像的共轭虚像的实验原理及方法, 并给出实验结果及扼要的理论解释。作者首次提出可把泰伯自成像公式的 m 值扩展到负值。

关键词 泰伯效应, 自成像, 共轭像, 周期物。

1 引 言

周期物(如光栅等)在相干光场中的自成像现象称为泰伯效应。泰伯像平面距周期物为

$$z = m2d^2/\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

式中 d 为光栅常数, λ 为入射单色光波长^[1~4]。文献[1]讨论了 m 为非整正数的情况, 指出在某些特定平面上能形成原周期物的正自成像、负自成像、倍频像、多倍频像。

作者在实验中发现, (1)式中 m 值可以扩展到负值, 而且既可为负整数, 也可以非整负数。这时所形成的像为虚像, 其成像位置与相应正 m 值的泰伯像相对于周期物为对称, 即与文献[1]描述的泰伯像互为镜像。作者认为: 这种现象是泰伯效应的共轭现象, 其所成的像可称之为泰伯像的共轭虚像。

本文将介绍观察泰伯效应的共轭现象的实验, 并给出实验结果以及扼要的理论解释。

2 实 验

2.1 实验原理

由几何光学可知, 当物体置于透镜焦点之内侧空间区域时, 在与物体同侧的空间区域中形成物体放大的虚像, 而在异侧空间则形成发散的光束; 而对于相干照明下的透光非周期物(如人头照片)置于透镜焦点之内侧区域时, 在透镜另一侧空间区域只能得到其零级衍射像即其几何投影。这时非周期物的“像”细节很不清晰, 只形成物体轮廓和概貌。

作者在实验中发现, 当把透光周期物置于透镜物方焦点内侧空间区域且用单色平行光照射时, 情况却有所不同。这时在置于透镜另一侧空间区域某些位置的屏幕上可以观察到清晰的周期物的自像、倍频像以及其它迭加像(实像)。可以认为: 这些实像是来自位于透镜物方焦点之外的“虚物”的光线经过透镜会聚而成; 而这些虚物则是平行光束经周期物衍射产生的发散光束反向延长相交而成。

为观察泰伯效应的共轭现象,特设计如下实验。如图 1,设周期物 P 用 He-Ne 激光平行光束垂直照明。移动屏幕 M 至某一位置,这时可在 M 上观察到某一泰伯像。记这时 $PM = Z_T$,并记录该泰伯像。

设想其共轭像位于 T' 平面,距 P 也为 Z_T 。把透镜 L 放进光路中,置于周期与屏幕之间,使 L 与 P 的距离 l 小于焦距 f ,且满足 $l = 2f - Z_T$,这时 T' 距 L 为 $2f$;移动屏幕至 M' 平面,且使 M' 与 L 的距离也为 $2f$,如图 2 所示。这时在 M' 中可观察到位于 T' 上的虚物经透镜会聚所成的实像(倒像),其大小与虚物相等。记录该实像。

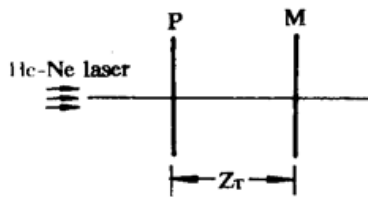


Fig. 1

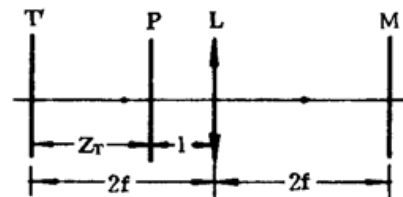




Fig. 2

值得一提的是:本实验之所以要求 $l < f$,其理由主要是考虑在这样的条件下,透镜不能直接使周期物在透镜后方空间区域形成清晰的像,因而如果能观察到周期物的某种清晰的像的话,就可以肯定该像不是周期物经透镜作用而形成的自身的像,而是某一位于焦点外侧空间的“虚物”在透镜作用下形成的像。作者认为这“虚物”就是泰伯像的共轭像;反之,如果 $l > f$,即周期物位于透镜焦点外侧区域,那么在透镜作用下于透镜后方空间某一位置将会形成周期物本身的像,而与所要观察的共轭像间杂从而增加了实验结果分析的复杂性。

2.2 实验结果

本实验采用的周期物的结构形式与文献[1]的单成分、双成分二维周期物相同,但周期略有不同(由于两次拍摄的缘故);所用透镜焦距 $f = 302 \text{ mm}$ 。实验数据如表 1 所示。

Table 1. Experimental data

No.	Schematic diagram of the two-dimensional periodic object	Z_T (cm)	distance between P and L (cm)	distance between L and M' (cm)	photograph No.
1	 x -direction period $D_x = 1.10 \text{ mm}$ y -direction period $d_y = 0.55 \mu\text{m}$	47.8			(a)
2		47.8	12.6	60.4	(b)
3	 x -direction period $d_x = 0.55 \mu\text{m}$ y -direction period $d_y = 1.10 \text{ mm}$	31.8			(c)
4		31.8	28.6	60.4	(d)

实验结果用 135 黑白胶卷直接曝光记录。如图 3 所示,其中图 3(a)是双成分周期物的泰伯像(倍频迭加像),图 3(b)是其相应的共轭像;图 3(c)是单成分周期物的泰伯像(三倍频

像), 而图 3(d)是其相应的共轭像。

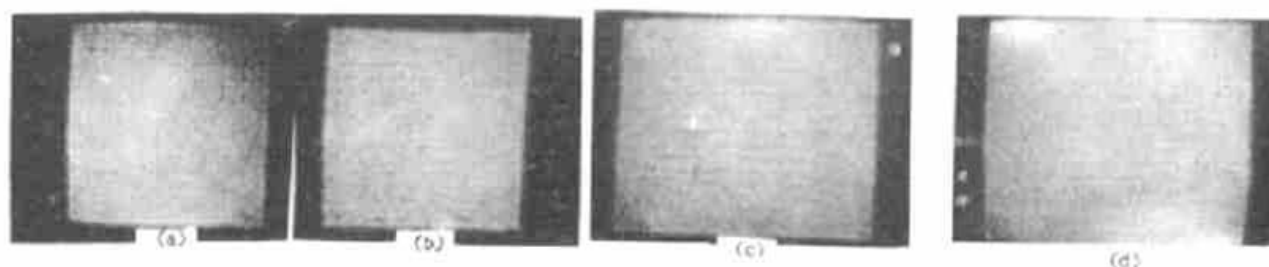


Fig. 3 Experimental result

2.3 实验结果分析

由实验结果可知, 泰伯像的共轭像的成像位置与理论预言位置相符, 即泰伯像相对于周期物为对称。因此把泰伯自成像公式中的 m 值扩展到负值是恰当的。

比较图 3(a)、图 3(b), 其大小相同, 图样也完全相同, 其中图 3(b)中右上角的畸变是由于让周期物偏离透镜光轴所致, 用以显示透镜的存在且与图 3(a)区别, 而照片图 3(c)、图 3(d)的大小也相同, 图样结构基本一致, 但其中“黑竖条”有所差别。这是由于透镜不仅把形成共轭像的发散光束会聚成像, 也使形成泰伯像的会聚光束会聚(但在该位置不成像)而迭加在共轭像所成的像上, 冲淡了该像中的黑竖条, 影响了对比度, 因此实验 3 中观察到两黑竖条间有三条细亮竖条, 而在实验 4 中细亮竖条之间暗区并不明显而呈现为较宽的亮竖条。

由此可见, 泰伯效应的共轭现象的确存在。尽管图 3(c)、图 3(d)有些差异, 也不影响这一结论。事实上, 从波前分解的观点来看^[6], 入射平面波透过周期物后, 它的衍射场中包含有一系列的会聚和发散的球面波成分。会聚的球面波成分直接迭加从而在特定距离的平面上形成泰伯像(自像), 而发散的球面波成分反向延长相交形成了泰伯像的共轭虚像。

必须指出: 上述直接观察共轭像的方法受透镜焦距大小的限制, 只能观察 $Z_r \leq 2f$ 的情况对于 $Z_r > 2f$ 的情况, 可仍保持透镜与周期物距离小于焦距 f , 把屏幕 M' 缓慢移向透镜, 这时可观察到一系列共轭像的像, 但这些像是缩小的(必要时可再用透镜加以放大)。记录相应位置, 再由物像关系反推出 Z_r 值。

3 理 论

为简单起见, 以一维周期物为例进行讨论。该周期物位于 $z = 0$ 平面, 且用单色平行光照明。设 $F(x)$ 是具有周期为 x_0 的周期物的振幅透过率, 同于是能够写出^[4]。

$$F(x) = \sum_n A_n \cos \frac{2\pi n x}{x_0} + \sum_n B_n \sin \frac{2\pi n x}{x_0} \quad (2)$$

式中 A_n 和 B_n 分别为傅里叶余弦和正弦系数。求和号内每一项都代表着一个余弦或正弦物体。则在任一 z 处的场由下式给出^[4]

$$u(x, z) = C e^{-i\alpha z} \sum_n \exp\left(i \frac{\pi \lambda z n^2}{x_0^2}\right) \left[A_n \cos \frac{2\pi n x}{x_0} + B_n \sin \frac{2\pi n x}{x_0} \right] \quad (3)$$

可见: 在 z 为任意值处的场是由不同相对位相(相对于 $z = 0$ 平面内)的各个傅里叶成分相加。每当方程(3)求和号内的指数项变为 1 时, 即当各个傅里叶成分再次以相同的相对位相(正如

$z = 0$ 平面内情况) 相加时, 原物分布就被重现。当 $z = m(2x_0^2/\lambda)$, 式中 $m = 1, 2, 3, \dots$ 时就将发生这种情况。这时强度分布与物强度分布相同, 这就是所谓“自像”。

注意到 $z = 0$ 平面处, 入射光波阵面是平面, 因而各点位相相同, 而透射光场为

$$u(x, 0) = C \sum_n \left(A_n \cos \frac{2\pi nx}{x_0} + B_n \sin \frac{2\pi nx}{x_0} \right) \quad (4)$$

可见透射光场各个傅叶成分也是同相的, 而其振幅透射率却因点而异。因此可以认为在 z 为大于零的任意值处的场, 任一傅里叶成分 (n 分量) 相对于 $z = 0$ 处有位相滞后 $[kz - (\pi\lambda zn^2)/x_0^2]$ 。

由傅里叶光学可知^[6], 若对任一平面上的复场分布作傅里叶分析, 则各个空间傅里叶分量可以看作是沿不同方向传播的平面波。在任一其他点上的场振幅, 可以在考虑到这些平面波传播到该点所经受的相移之后, 对各个平面波的贡献求和而算出。因此可以设想 $z = 0$ 平面的场分布由位于 z' ($z' < 0$) 的虚物的分布所决定。由于虚物的各个傅里叶成分传到 $z = 0$ 时经受了各不相同的相移之后而同相, 可见构成该虚物的各个傅里叶成分的位相各不相同。在 $x, y \ll |z'|$ 的情况下, 任一傅里叶成分 (n 分量) 相对于 $z = 0$ 平面的相应成分的位相超前

$$\phi = k|z'| - \frac{\pi\lambda|z'|n^2}{x_0^2} = -kz' + \frac{\pi\lambda z' n^2}{x_0^2}$$

注意这里 $z' < 0$ 。虚物由这些成分迭加而成, 因此其场分布为

$$u(x, z') = C e^{ik|z'|} \sum_n \exp \left(-i \frac{\pi\lambda|z'|n^2}{x_0^2} \right) \left[A_n \cos \frac{2\pi nx}{x_0} + B_n \sin \frac{2\pi nx}{x_0} \right] \quad (5)$$

当求和号内指数项变为 1 时, z' 平面的物分布与 $z = 0$ 平面相同, 这时有

$$z' = -l(2x_0^2/\lambda) \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

而由(3)式, 当 $z = m(2x_0^2/\lambda)$ 时 ($m = 1, 2, 3, \dots$), z 平面物分布与 $z = 0$ 平面物分布相同, 因此 z' 平面与 z 平面的物分布相同, 且有

$$z' = -z$$

由此可见: 若 z 平面处为泰伯像, 则 $-z$ 平面处为泰伯像的共轭虚像。即: 泰伯像与它的共轭像以周期物为镜像对称。综合(1)式和(6)式可得

$$z = m(2d^2/\lambda) \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (7)$$

其中负值对应于共轭像。

以上所述原则上推广到可对 m 为非整数的情况也适合。对实验 1, 周期物横向周期 $d_x = 1.10 \text{ mm}$, $z_T = 47.8 \text{ cm}$, 因此有 $z = d_x^2/4\lambda$, 对应于(7)式中 $m = 1/8$ 的情况。把 $z = x_0^2/4\lambda$ (其中 $x_0 = d_x$) 代入(3)式可得

$$\begin{aligned} u(x, z) &= C e^{-ikz} \sum_n \exp \left(i \frac{\pi}{4} n^2 \right) \left[A_n \cos \frac{2\pi nx}{x_0} + B_n \sin \frac{2\pi nx}{x_0} \right] \\ &= C e^{-ikz} \left[\sum_{n=2l} \exp(i\pi l^2) A_{2l} \cos \frac{2\pi lx}{x_0/2} + \sum_{n=2l} \exp(i\pi l^2) B_{2l} \sin \frac{2\pi lx}{x_0/2} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{n=2l+1} \exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) A_{2l+1} \cos \left(\frac{2\pi lx}{x_0/2} + \frac{2\pi x}{x_0} \right) + \sum_{n=2l+1} \exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) B_{2l+1} \sin \left(\frac{2\pi lx}{x_0/2} + \frac{2\pi x}{x_0} \right) \right] \quad (8) \end{aligned}$$

上式中各求和号内每一项都含有周期为 $x_0/2$ 的成分, 可见 $u(x, z)$ 为原周期物的倍频像。

在实验 2 观察到的是位于 $-z_T$ 处的虚物的像。该虚物就是实验 1 的倍频像的共轭虚像, 且位于 $z = -d_x^2/4\lambda$ 。这对应于 $m = -1/8$ 的情况。

对实验 3, 周期物横向周期 $d_x = 0.55 \text{ mm}$, $z_T = 31.8 \text{ cm}$, 因而有 $z_T = 2d_x^2/3\lambda$ 。这对应于 (7) 式中 $m = 1/3$ 的情况。用上述方法可确定各分量都含有 $x_0/3$ 的成分, 从而形成原周期物的三倍频像。实验 4 的虚物(三倍频像的共轭虚像)位于 $z = -z_T = -2d_x^2/3\lambda$, 这对应于 (7) 式中 $m = -1/3$ 的情况。

顺便一提, 实验 1 中周期物竖向周期 $d_y = 0.55 \text{ mm}$, 而 $z_T = 47.8 \text{ cm}$, 因此 $z_T = d_y^2/\lambda$, 对应于竖向 $m' = 1/2$ 。这时在 y 方向上应有 $u(y, z_T)$ 为 $u(y, 0)$ 沿 y 方向平移 $dy/2$, 因此照片(a)是横向倍频和竖向平移的综合结果。

结 论 1) 周期物在相干光场中衍射可形成泰伯像, 也可形成泰伯像的共轭虚像。借助透镜可在屏幕上直接观察共轭泰伯像; 2) 由于共轭泰伯像的存在, 因此可把(1)式的 m 值扩展到负值, 即

$$z = m 2d^2/\lambda \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

3) 周期物与非周期物的差异在于前者频谱是离散的, 而后者是连续的, 因此前者在特定距离平面上各频谱成分迭加后能形成相对固定的周期性位相关系(分立的相差), 从而能形成周期物的自像, 而非周期物则不能形成分立的相差因而不能自成像。

参 考 文 献

- [1] 黄冠夏, 郑光昭, 周 声, 利用 Talbot 效应实现图像相加。激光杂志, 1991, 12(1): 30~34
- [2] 王之江, 伍树东, 成像光学, 北京, 科学出版社, 1991: 134~135
- [3] Paul Latimer, Talbot plane patterns: grating images or interference effects? *Appl. Opt.*, 1993, 32(7): 1078~1083
- [4] A. K. 加塔克, K. 塞格雷健, 蒙文林译。现代光学, 呼和浩特, 内蒙古人民出版社, 1986: 140~141
- [5] 赵凯华, 钟锡华, 光学(上册)。北京, 北京大学出版社, 1984: 204~206
- [6] J. W. Goodman, 詹达三, 董经武, 顾本源译。傅里叶光学导论, 北京, 科学出版社, 1979: 54~56

Conjugate Image of the Talbot Image

Zheng Guangzhao

(Department of Basic Science, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510643)

(Received 1 August 1995; revised 10 November 1995)

Abstract Conjugate image of the Talbot image is observed in the experiments. The principle and method of the experiments for observing the conjugate image of Talbot images are discussed. The experimental results and brief theoretical explanation are given. The author presented for the first time that the m value in the formula of Talbot self-imaging may expand to the negative

Key words Talbot effect, self-imaging, conjugate image, periodic object.