第16卷 第4期 光 学 学 报 Vol. 16. No. 4
1996年4月 ACTA OPTICA SINICA Apr., 1996

光束截面的能量守恒及能量衍射发散度

曹 清 郭 弘 邓锡铭
（中国科学院上海光学精密机械研究所，上海 201800）

摘 要 证明了任何一个在真空中稳态传输的单色标量光束，在忽略了瞬逝波的条件下，其光束截面能量的径向分量 $E_{\perp}$ 及轴向分量 $E_{\parallel}$ 都与轴坐标无关，它们都为不变量；文中还进一步给出了光束能量衍射发散度的 x、y 分量的表达式。

关键词 光流体模型， 光束截面能量， 能量衍射发散度。

1 引 言

在文献[1]所描述的光流体模型中，定义了光束截面能量的径向分量 $E_{\perp}$ 及能量衍射发散度 Γ_e 的概念；文献[2]在傍轴近似下证明了 $E_{\perp}$ 与截面的位置无关，即在傍轴稳态传输过程中，$E_{\perp}$ 为守恒量。文献[1]和文献[3]还给出了傍轴近似下 Γ_e 的简洁表述：$\Gamma_e = E_{\perp}$。本文将利用傅里叶变换方法来进一步证明：对于在真空中稳态传输的任意单色标量光束（包括傍轴光束及非傍轴光束）来说，在忽略了瞬逝波的条件下，其光束截面能量的径向分量 $E_{\perp}$（及其单一分量 E_x、E_y）以及轴向分量 $E_{\parallel}$（或 E_z）都与截面的位置无关，它们都为不变量；文中还将给出 x、y 方向的能量衍射发散度的具体表述。

2 光束截面能量的 $E_{\perp}$ 及 $E_{\parallel}$ 是守恒量

在标量场近似的情况下，一个稳态的单色标量光场可用一个复振幅分布函数 ϕ 来表示，并满足稳态亥姆霍兹波动方程

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \tag{1}$$

它的解可以表示为如下的形式

$$\phi = \phi_0 \exp(-ikL), \qquad k = 2\pi/\lambda \tag{2}$$

其中 ϕ_0 为振幅，L 为准程函数，它们都是空间坐标(x、y、z)的实函数。另外，文献[1]还给出了光束截面能量径向分量 $E_{\perp}$ 的表达式，即

$$E_{\perp} = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 (\nabla L)_{\perp}^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\nabla \phi_0)_{\perp}^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

需要指出的是，本文中的角标“⊥”、“x”、“y”和“∥”分别对应于径向、x 方向、y 方向与轴向的微分算子，它们与最常用的矢量的分量概念是不同的（下同），$E_{\perp}$ 还可进一步表示为

收稿日期:1995年3月2日；收到修改稿日期:1995年5月12日

$$E_{\perp} = E_x + E_y \tag{4}$$

其中

$$E_x = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\phi_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

$$E_y = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\phi_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6}$$

它们分别表示了 $E_{\perp}$ 的 x 分量及 y 分量。以下将来证明，$E_{\perp}$、E_x 及 E_y 都与截面的轴向坐标无关，是守恒量。为了方便分析，本文将假定任一截面上的 $\phi(x, y)$ 都已满足归一化条件，即

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\phi(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \tag{7}$$

对 $\phi(x, y)$ 作傅里叶变换，则可得到

$$\psi(f_x, f_y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) \exp\left[-i2\pi(f_x x + f_y y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8}$$

它是 $\phi(x, y)$ 的空间频谱函数，而 $\phi(x, y)$ 则为

$$\phi(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(f_x, f_y) \exp\left[i2\pi(f_x x + f_y y)\right] \mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{9}$$

它们构成了一组傅里叶变换对，并可用记号 F、F^{-1} 表示为

$$F[\phi(x, y)] = \psi(f_x, f_y), \qquad F^{-1}[\psi(f_x, f_y)] = \phi(x, y) \tag{10}$$

在傅里叶分析中，微分运算的傅里叶变换为

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y)\right] = i2\pi f_x F[\phi(x, y)] \tag{11}$$

另外，还存在一个重要的帕塞伐恒等式

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |G(f_x, f_y)|^2 \mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{12}$$

其中

$$G(f_x, f_y) = F[g(x, y)] \tag{13}$$

令

$$g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y) \tag{14}$$

并利用(11)～(12)式，则可得到

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\pi^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f_x^2 |\psi(f_x, f_y)|^2 \mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{15}$$

而另一方面，可以得到

$$\begin{aligned}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= k^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\phi_0^2\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= k^2 E_x\end{aligned} \tag{16}$$

现在来对(15)式进行分析，由傅里叶光学可知，对于相距为 z 的任意两个截面来说，通过使用傅里叶变换及亥姆霍兹波动方程，能够推出这两个截面上空间频谱函数 $\psi_0(f_x, f_y)$ 与 $\psi_z(f_x, f_y)$ 之间的关系为[4~5]

$$\psi_z(f_x, f_y) = \psi_0(f_x, f_y)\exp\left[ikz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}\right] \tag{17}$$

由(17)式可得

$$|\psi_z(f_x, f_y)|^2 = |\psi_0(f_x, f_y)|^2 \tag{18}$$

即 $|\psi(f_x, f_y)|^2$ 是一个与轴坐标 z 无关的不变量。

利用这个性质，并结合(15)～(16)式，可得

$$E_x = \text{const} \tag{19}$$

即 $E_\perp$ 的 x 分量不随截面位置的变化而变化，是一守恒量。同理可证，$E_\perp$ 的 y 分量 E_y 也具有与此相同的性质，因而从(4)式立刻可以得出：$E_\perp$ 也是一个与截面所在位置无关的守恒量。

由文献[1]中的(1.3)式可知

$$\phi_0^2 = \phi_0^2(\nabla L)^2 + \frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2 - \frac{1}{2k^2}\nabla^2\phi_0^2 \tag{20}$$

把(20)式对整个截面积分，得

$$\begin{aligned}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = &\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\phi_0^2(\nabla L)_\perp^2 + \frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)_\perp^2 - \frac{1}{2k^2}(\nabla^2\phi_0^2)_\perp\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &+ \iint_{-\infty}^{\infty}\left[\phi_0^2(\nabla L)_\parallel^2 + \frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)_\parallel^2 - \frac{1}{2k^2}(\nabla^2\phi_0^2)_\parallel\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{21}$$

其中角标“$\parallel$”代表对 z 作偏微分。在证明 $E_\parallel$ 的守恒性质之前，先来证明一个重要的结果，

即

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2k^2}(\nabla^2\phi_0^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{22}$$

由多变量的积分公式可得

$$\begin{aligned}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\phi_0^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\phi_0^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left.\frac{\partial\phi_0^2}{\partial x}\right|_{\infty} - \left.\frac{\partial\phi_0^2}{\partial x}\right|_{-\infty}\right)\mathrm{d}y = 0\end{aligned} \tag{23}$$

在最后一步中，使用了一个远场边界条件：即当 $|x|$ 趋向于无穷大时，$\partial\phi_0^2/\partial x = 0$。同理可证，

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\phi_0^2}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{24}$$

而另一方面，还可得到

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\phi_0^2}{\partial z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{25}$$

在得到上述的结果时，利用了总能量守恒公式(7)式。把(23)～(25)式直接相加，再乘上因子 $1/2k^2$，就可得到(22)式。利用(22)式的结果，则可进一步地把(21)式表示为

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 = E_\perp + E_\parallel \tag{26}$$

其中

$$E_\parallel = \iint_{-\infty}^{\infty}\left[\phi_0^2(\nabla L)_\parallel^2 + \frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)_\parallel^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{27}$$

它表示光束截面能量的轴向分量。由于 $E_\perp$ 是与截面无关的守恒量，所以从(26)式可得 $E_\parallel$ 也

是一个与截面位置无关的守恒量。

对于傍轴传输的光束来说，引用傍轴慢变振幅近似，则可得到

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,(\nabla \phi_0)^2_{\parallel}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx 0 \tag{28}$$

在此情况下，$E_{\parallel}$ 有一个更为简洁的表述

$$E_{\parallel} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2\,(\nabla L)^2_{\parallel}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{29}$$

当然，在傍轴近似下，$E_{\parallel}$ 也仍然是与纵向坐标无关的守恒量。

需要指出的是，在上述的推导过程中，曾使用了傅里叶光学中的一个重要结果(17)式，而此结果是在直接利用傅里叶变换及亥姆霍兹波动方程的情况下得到的，并未作傍轴近似[4,5]，所以上述的结论不仅对于傍轴光束有效，而且对于非傍轴的单色标量光束也是成立的。在这个推导过程中，本文所作的唯一的一个近似就是在得到(18)式时忽略了瞬逝波，故从纯粹理论上的严格性来说，它们的适用范围应该是不含有瞬逝波成份的标量光束，即当 $\lambda^2(f_x^2 + f_y^2) > 1$ 时，其对应的功率谱密度 $|\psi(f_x, f_y)|^2 = 0$。然而，对于实际存在的光束来说，只要它的横向宽度远大于波长(显而易见，当此条件不满足时，则意味着标量场理论不再适用，需要使用矢量场理论)，则其所含有的瞬逝波成份就会微乎其微，因而它们对 $E_{\perp}$、$E_{\parallel}$ 的影响也是微乎其微的，由此可见，以上所作的忽略瞬逝波的近似是标量场理论下的一个很合理的近似。由上述的分析可知，$E_{\perp}$、$E_{\parallel}$ 的守恒性质是标量场理论下的一个较为精确的结果。

$E_{\perp}$、$E_{\parallel}$ 除了具有是守恒量这个性质之外，它们还分别与光束截面动量的径向分量、轴向分量相对应[1]。这说明光流体模型理论把光束截面的总能量区分为 $E_{\perp}$ 及 $E_{\parallel}$ 的做法不但是可行的，而且是合理的。这种区分的一个直接的应用就是使用 $E_{\perp}$ 来表示光束的能量衍射发散度，从而为光束的衍射发散程度赋予了明确的物理意义。

3 光束的能量衍射发散度

由文献[1～3]可知，能量衍射发散度 Γ_e 可表示为

$$\Gamma_e = E_{\perp\infty} \tag{30}$$

它还可进一步分离为

$$\Gamma_e = E_{\perp\infty} = E_{\perp} = E_x + E_y \tag{31}$$

而由于 E_x、E_y 也都是与截面位置无关的不变量，因而可以进一步来定义 x、y 方向的能量衍射发散度

$$\Gamma_{ex} = E_x, \qquad \Gamma_{ey} = E_y \tag{32}$$

它们分别表征了 x 及 y 方向的能量衍射发散程度。显然，Γ_e、Γ_{ex}、Γ_{ey} 之间存在以下的关系

$$\Gamma_e = \Gamma_{ex} + \Gamma_{ey} \tag{33}$$

由于 $E_{\perp}$、E_x，E_y 都与截面的位置无关，因而只要算出任一截面(通常选择光阑截面)上的 $E_{\perp}$ 及其 x、y 方向分量，即可获得 Γ_e、Γ_{ex}、Γ_{ey}，这简化了计算量，从而为许多实际应用提供了很大的方便。

值得一提的是，在使用衍射发散度公式来计算截断匀幅平面波的 Γ_e 时，似乎会导致其值变为无穷大。关于这一点，从(26)式即可看出这是不可能的，因为 $E_{\perp}$ 为总能量的一部分，它永远不可能大于 1。实际的物理过程是，当匀幅平面波到达截断光阑附近时，光场分布函数

$\phi(x,y)$ 会在光阑边缘部分形成一个缓变的光场分布梯度，而不是象简单模型所假定的那样，ϕ_0 会在边缘部分有一个突变，并使得径向内禀能量变为无穷大。文献[3]已经很好地解决了这个问题，并给出了截断匀幅平面波能量衍射发散度的一个统一的公式。

最后，区分一下两个容易混淆的物理量：光束截面能量的径向分量 $E_\perp$ 和光束的内部能量 E_{in}，根据文献[1～2]，并考虑到总能量已经归一化，则内部能量的表达式为

$$E_{in} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\nabla\phi_0)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_0^2}{c^2} (c\nabla L - \boldsymbol{V}_c)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{34}$$

其中 $\boldsymbol{V}_c$ 为光束惯性中心的速度，它平行于 z 轴。可以证明 E_{in} 与 E 之间的关系为

$$E_{in} = E_\perp + \frac{1}{k^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\nabla\phi_0)_\parallel^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 [(\nabla L)_\parallel^2 - V_c^2] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{35}$$

在傍轴近似的情况下，(35)式右边第二项和第三项的积分为 0，所以有

$$E_{in} = E_\perp \tag{36}$$

它们在傍轴传输过程中都为守恒量，这就是文献[2]所得到的结果。但对于非傍轴的光束传输来说，由于(35)式右边第二项与第三项的积分都不再为 0，所以 E_{in} 是否仍为守恒量，尚有待于进一步的研究。

参 考 文 献

[1] 邓锡铭，有限束宽光动力学，杭州大学出版社，1993 年 3 月

[2] 邓锡铭，陈泽尊，傍轴光束截面的内能是一个不变量. 光学学报，1983，3(5)：385

[3] 邓锡铭，方洪烈，黄镇江等，光束通过硬边光阑的内禀能量和衍射发散度. 激光，1981，8(12)：1

[4] 黄婉云，傅里叶光学教程，北京师范大学出版社，1985 年 5 月

[5] J. W. 顾德门，傅里叶光学导论，北京，科学出版社，1979 年 4 月

Energy Conservation of Beam Cross-Section and Energy Diffraction Divergence

Cao Qing　　Guo Hong　　Deng Ximing

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

(Received 2 March 1995; revised 12 May 1995)

Abstract We prove that, for any stable propagating monochromatic scalar beam in vacuum, the radial component $E_\perp$ and the z component $E_\parallel$ of the beam cross-section energy are invariances and independent of the position of the cross-section if the evanescent waves of the plane-wave spectrum of the beam are ignored. The expressions of x and y component of beam energy diffraction divergence are derived.

Key words HMO, beam cross-section energy, energy diffraction divergence.