

# 简并拉曼过程中斯塔克位移对 原子反转及场熵的影响\*

刘 翔 方卯发\*\*

(湖南师范大学物理系, 长沙 410081)

**摘 要** 研究了考虑斯塔克(Stark)位移的简并拉曼过程中原子与场的耦合特性及斯塔克位移对原子反转及场熵的影响。

**关键词** 简并拉曼过程, 斯塔克位移, 场熵。

## 1 引 言

在 J-C 模型中, 原子的动力学行为呈现周期性的崩溃与回复效应<sup>[1]</sup>。近年来, 许多作者研究了 J-C 模型中的场熵, 认为场熵(原子熵)反映了场与原子的耦合程度<sup>[2, 3]</sup>, 场熵越大, 耦合越深, 同时也是解释系统动力学行为的一个重要工具<sup>[4]</sup>。

简并拉曼相互作用是指  $\Lambda$  型三能级原子与单模场的耦合作用。当原子高能级与两低能级(简并)的跃迁频率远离场共振频率时, 在绝热情况下, 可删去高能级, 两简并低能级经由一虚高能级相互作用, 这便是双光子简并拉曼耦合 J-C 模型<sup>[5]</sup>。在此模型中, 原子与场相互作用不改变场能, 即不改变腔场光子数, 因其简单性, 不少作者对此模型已有研究报道, 如形成完美周期系列的原子反转的崩溃与回复现象<sup>[4, 6]</sup>及反映原子与场耦合程度的场熵演化<sup>[4]</sup>, 陷阱态时的布居俘获<sup>[7]</sup>, 偶极相互作用对崩溃与回复的影响<sup>[8]</sup>, 等等。

但在许多实际情况中, 原子能级的能量斯塔克位移是存在的, 当双光子的拉比频率较大时, 斯塔克位移效应便不容忽视<sup>[4]</sup>。最近, Xu 和 Zhang 将原子能级的斯塔克位移引入拉曼耦合 J-C 模型中<sup>[9]</sup>, 由此得到包括非对角项的系统约化密度算符, 并讨论了在原子两能级的斯塔克位移参数  $\beta_1 = \beta_2$  时, 崩溃与回复及光场压缩等现象。

本文研究考虑斯塔克位移的简并拉曼耦合模型中, 斯塔克位移参数  $r = (\beta_1/\beta_2)^{1/2}$  对原子反转及场熵的影响, 并在半经典理论范畴, 用光学布赫(Block)方程<sup>[10, 11]</sup>对这种影响作出解释。

\* 国家自然科学基金资助课题。

\*\* 中国高等科学技术中心(世界实验室), 北京 100080。

收稿日期: 1995年7月22日; 收到修改稿日期: 1995年11月29日

## 2 考虑斯塔克位移的拉曼耦合模型及其原子动力学特性

双光子拉曼耦合模型中, 原子两简并能级经由一虚高能级与理想单模场相互作用, 产生拉曼型跃迁, 系统能级如图 1 所示。

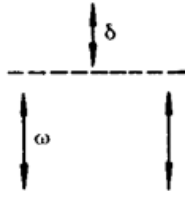


Fig. 1 Level scheme for the degenerate Raman-coupled model.  $\omega$  is the field mode frequency,  $\delta$  is the detuning

原子的两简并能级分别标示为  $| + \rangle$ ,  $| - \rangle$ , 虚高能级标示为  $| i \rangle$ , 考虑斯塔克位移, 则系统的有效哈密顿量( $\hbar = 1$ )为<sup>[9]</sup>:

$$H = \omega a^+ a + g a^+ a (S_+ + S_-) + a^+ a (\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2), \tag{1}$$

式中,  $a^+$  ( $a$ ) 为场产生 (消灭) 算符,  $\omega$  为场频,  $S_+ = | + \rangle \langle - |$ ,  $S_- = | - \rangle \langle + |$ ,  $S_2 = | + \rangle \langle + |$ ,  $S_1 = | - \rangle \langle - |$ ,  $g$  为原子与场的耦合常数,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  分别为两能级的斯塔克位移参数, 且有  $g = -g_1 g_2 / \delta$ ,  $\beta_1 = -g_1^2 / \delta$ ,  $\beta_2 = -g_2^2 / \delta$ , 这里,  $\delta$  为场与原子的失谐频率, 耦合常数  $g_1$ ,  $g_2$  分别属于  $| - \rangle \rightarrow | i \rangle$ ,  $| + \rangle \rightarrow | i \rangle$  的跃迁。因为  $| + \rangle$  和  $| - \rangle$  是简并的, 所以  $\omega_0 = 0$  (见图 1)。

在相互作用绘景中, 有

$$H_i = g a^+ a (S_+ + S_-) + a^+ a (\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2) \tag{2}$$

初始时刻, 场处于相干态

$$|\psi_f(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q_n |n\rangle$$

$$q_n = \exp(-\pi^2/2) (\bar{n}^n / n!) \exp(i n \varphi) \tag{3}$$

原子处于激发态  $| + \rangle$ , 则系统初始态:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_f(0)\rangle \otimes | + \rangle \tag{4}$$

任意时刻  $t$ , 系统的波函数为<sup>[9]</sup>:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q_n [C_n(t) | -, n \rangle + D_n(t) | +, n \rangle] \tag{5}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} C_n(t) &= -\frac{\gamma}{1+\gamma^2} + \frac{\gamma}{1+\gamma^2} \exp(-i\Omega_n t), & \gamma &= (\beta_1/\beta_2)^{1/2}, \\ D_n(t) &= \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} - \frac{1}{1+\gamma^2} \exp(-i\Omega_n t), & \Omega_n &= n \left( \frac{1+\gamma^2}{\gamma} \right) g. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

场约化密度算符为

$$\begin{aligned} \rho_f(t) &= \text{Tr}_{\text{atom}} \{ |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_m q_n^* \{ C_m(t) C_n^*(t) |m\rangle \langle n| + D_m(t) D_n^*(t) |m\rangle \langle n| \} \\ &= |C\rangle \langle C| + |D\rangle \langle D| \end{aligned} \tag{7}$$

由(5)式可得原子反转  $W(t) = \langle \psi(t) | (| + \rangle \langle + | - | - \rangle \langle - |) | \psi(t) \rangle$  的时间演化:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 (|D_n(t)|^2 - |C_n(t)|^2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 \left( \frac{(1-\gamma^2)^2}{(1+\gamma^2)^2} + \frac{4\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} \cos(\Omega_n t) \right) \quad (8)$$

从(8)式中, 可估计出回复周期:

$$T_R = \frac{2\pi\gamma}{(1+\gamma^2)g} \quad (9)$$

### 3 场熵及其计算公式

由 Phoenix-Knight 的熵理论<sup>[2]</sup>可知: 计算场熵须先求场约化密度矩阵的本征值。

设  $|\psi_f(t)\rangle$  是  $\rho_f(t)$  的本征态,  $\pi_f$  为本征值,

$$\rho_f(t) |\psi_f(t)\rangle = \pi_f |\psi_f(t)\rangle \quad (10)$$

将  $|\psi_f(t)\rangle$  写成双量子态形式,  $|\psi_f(t)\rangle = \xi|C\rangle + \eta|D\rangle$ , 则:

$$\begin{aligned} \rho_f(t) |\psi_f(t)\rangle &= \{ \langle C|C\rangle + \langle C|D\rangle \eta/\xi \} \xi|C\rangle \\ &+ \{ \langle D|D\rangle + \langle D|C\rangle (\xi/\eta) \} \eta|D\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

本征值  $\pi_f$  有以下关系:

$$\pi_f = \langle C|C\rangle + \langle C|D\rangle (\eta/\xi) = \langle D|D\rangle + \langle D|C\rangle (\xi/\eta) \quad (12)$$

作如下替换:

$$\begin{aligned} \langle C|D\rangle &= |\langle C|D\rangle| \exp(i\phi), & \xi &= \exp[(1/2)(i\phi \pm \theta)], \\ \eta &= \pm \exp[-(1/2)(i\phi \pm \theta)], & \theta &= \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right), \\ x &= (\langle C|C\rangle - \langle D|D\rangle) / |\langle C|D\rangle| \end{aligned} \quad (13)$$

得到光场约化密度矩阵的本征值为:

$$\begin{aligned} \pi_f^\pm &= \langle C|C\rangle \pm \exp(\mp\theta) |\langle C|D\rangle| \\ &= (1/2) (\langle C|C\rangle + \langle D|D\rangle) \pm (1/2) [(\langle C|C\rangle - \langle D|D\rangle)^2 \pm 4|\langle C|D\rangle|^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \langle C|C\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma^2)} [1 - \cos(\Omega_n t)], \\ \langle D|D\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 \left[ \frac{1+\gamma^4}{(1+\gamma^2)^2} + \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} \cos(\Omega_n t) \right] \\ \langle C|D\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 \frac{\gamma(1-\gamma^2)}{(1+\gamma^2)^2} [1 - \cos(\Omega_n t)] + i \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 \frac{\gamma}{1+\gamma^2} \sin(\Omega_n t) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由此, 光场的熵值计算公式:

$$S_f(t) = -\pi_f^+ \ln \pi_f^+ - \pi_f^- \ln \pi_f^- \quad (16)$$

因初始时刻, 光场-原子系统处于纯态, 系统熵  $S(0) = 0$ , 因而, 在  $t > 0$  的任意时刻,  $S_f(t) = S_a(t)$  (原子熵)<sup>[2, 4]</sup>。

### 4 讨 论

考虑斯塔克位移效应的原子反转和场熵的部分数值计算结果分别呈示于图 2 和图 3 中。

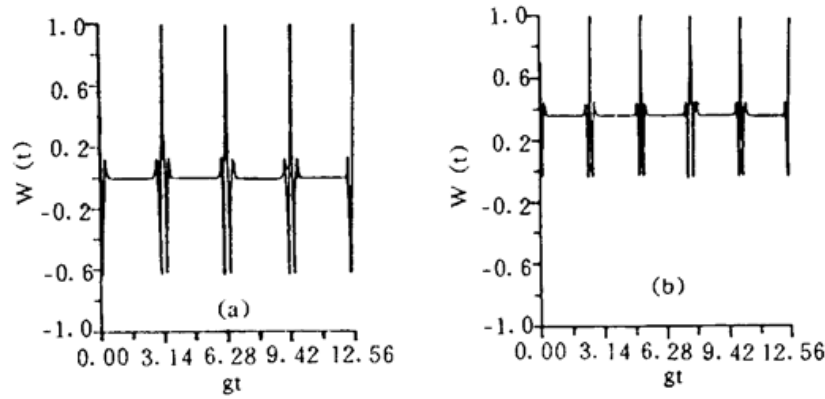


Fig. 2 The evolution of the atom inversion for mean photon number  $\bar{n} = 10$ , the atom is initially in the state  $|+\rangle$  (a)  $\gamma = 1.0$ , (b)  $\gamma = 0.5$

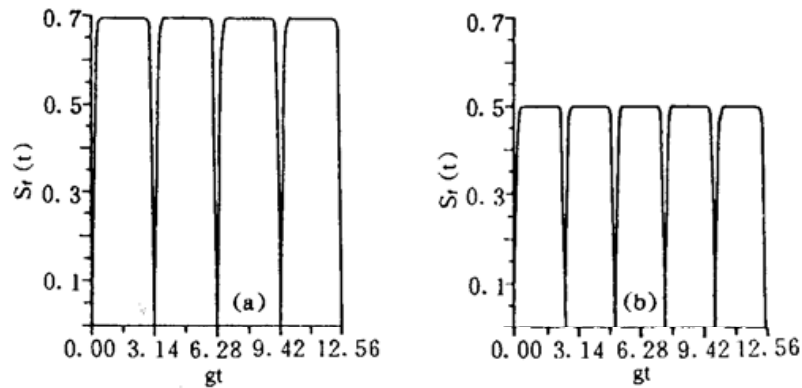


Fig. 3 The evolution of the field entropy for mean photon number  $\bar{n} = 10$ , the atom is initially in the state  $|+\rangle$  (a)  $\gamma = 1.0$ , (b)  $\gamma = 0.5$

初始平均光子取  $\bar{n} = 10$ , 原子处于激发态  $|+\rangle$ 。

在图 2(a)、图 3(a)中,  $\gamma = 1.0$  ( $\beta_1 = \beta_2$ , 即原子两能级的斯塔克位移相等), 原子反转的回复周期  $T_R = \pi/g$ , 原子反转<sup>[9]</sup>与场熵均呈现完美的周期性振荡, 场熵演化周期与回复周期相同, 在  $t^K = KT_R$  处,  $S_f(t^K) = 0$ , 原子与场完全退耦合, 系统退回初始纯态, 即:  $|\psi(t^K = KT_R)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q_n [C_n(t^K = KT_R) |-, n\rangle + D_n(t^K = KT_R) |+, n\rangle] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n |n\rangle \otimes |+\rangle$ , 另外, 从这两图中还发现,  $\gamma = 1.0$  时, 崩溃与回复及场熵振荡现象与不考虑斯塔克位移(即  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ )<sup>[4]</sup> 时完全一样, 对于这点, 作者认为, 当  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  时,  $\Omega_n = 2ng$ <sup>[4]</sup>, 而当  $\gamma = 1.0$  (即  $\beta_1 = \beta_2$ ) 时, 也有  $\Omega_n = 2ng$ , 场熵中的参数  $\langle C|C\rangle$ 、 $\langle D|D\rangle$  和  $|\langle C|D\rangle|$  在这两种情况下完全一致; 另外, 从物理本质上看, 当  $\gamma = 1.0$  时, 即两能级斯塔克位移相等 ( $\beta_1 = \beta_2$ ) 时, 斯塔克位移引起的依赖强度的有效失谐量<sup>[12]</sup>  $\Delta_N = \beta_1 - \beta_2 = 0$ , 在这种情况下, 斯塔克位移对原正反转及场熵演化并无影响<sup>[12]</sup>。

图 2(b)、3(b)中,  $\gamma = (\beta_1/\beta_2)^{1/2} = 0.5$ , 即原子两能级有不等的斯塔克位移, 从图中可见; 回复周期及场熵演化周期均减小,  $T'_R = 2\pi\gamma/(1+\gamma^2)g = 0.8\pi/g$ ; 而且, 回复幅度及最大场熵值也都减小, 这是因为: 当  $\gamma = 0.5$  ( $\beta_1 \neq \beta_2$ ) 时, 有效失谐量  $\Delta_N (= \beta_1 - \beta_2)$  不再为零,  $\Delta_N$  值的增加导致原子和场之间的退耦合(即最大场熵值减小)<sup>[13]</sup>。

## 5 半经典理论解释

半经典光学布赫方程中, 光场对原子的效应通过转力  $\Omega(t)$  体现, 它导致描述原子状态的布赫矢量  $\mathbf{k}(t)$  随时间绕  $\Omega(t)$  在单位球面上旋进<sup>[11]</sup>。将(1)式中算符  $a$  写成  $C$  数, 即

$$a = \sqrt{\bar{n}} \exp[-i(\omega t - \varphi)]$$

可得到系统的半经典哈密顿量 ( $\hbar = 1$ ):

$$H = \omega \bar{n} + \bar{n}g(S_+ + S_-) + \bar{n}(\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2) \quad (17)$$

由海森伯方程:  $dA/dt = i[H, A]$ , 可得到原子算符的运动方程:

$$\begin{aligned} dS_+/dt &= -i2g\bar{n}S_z + i\bar{n}\Delta_N S_+, \\ dS_-/dt &= i2g\bar{n}S_z - i\bar{n}\Delta_N S_-, \\ dS_z/dt &= -ig\bar{n}S_+ + ig\bar{n}S_-, \end{aligned} \quad (18)$$

引入如下变换:

$$R_x = S_+ + S_-, \quad R_y = i[S_+ - S_-], \quad R_z = 2S_z \quad (19)$$

原子的布赫矢量  $\mathbf{R}(t) = \{R_x(t), R_y(t), R_z(t)\}$ , 利用(18)及(19)式, 满足光学布赫方程  $d\mathbf{R}(t)/dt = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{R}(t)$  的场转矩力矢量  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  为:

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \{2g\bar{n}, 0, \bar{n}\Delta_N\} \quad (20)$$

利用布赫矢量方程, 可以分析布赫矢量的运动状态和场熵值的关系。

当  $\mathbf{R}(t)$  与  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  平行或反平行时,  $\mathbf{R}(t)$  绕  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  旋进的范围最小, 可以说布赫矢量  $\mathbf{R}(t)$  不随时间变化, 这意味着原子处于稳定状态, 此时, 场与原子相互作用的场熵值很小; 当  $\mathbf{R}(t)$  与  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  垂直时,  $\mathbf{R}(t)$  绕  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  旋进的范围最大,  $\mathbf{R}(t)$  随时间变化, 原子状态将展示其动力学演化, 此时, 场与原子相互作用的最大场熵值最大。

见图 2、图 3 中, 初始时刻, 原子处于激发态  $|+\rangle$ , 则描述原子状态的布赫矢量为<sup>[11]</sup>:

$$\mathbf{R}(0) = \{0, 0, 1\} \quad (21)$$

又  $\boldsymbol{\Omega}(0) = \{2g\bar{n}, 0, \bar{n}\Delta_N\}$ , 因而, 布赫矢量进动范围决定于依赖强度的有效失谐量  $\Delta_N$ 。当  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  (即不考虑斯塔克位移) 或  $\gamma = 1.0$  (原子两能级的斯塔克位移相等,  $\beta_1 = \beta_2$ ) 时,  $\Delta_N = 0$ ,  $\mathbf{R}(0)$  与  $\boldsymbol{\Omega}(0)$  相互垂直, 布赫矢量  $\mathbf{R}$  的进动范围最大, 此时, 原子动力学演化的回复幅度及最大场熵值终保持最大, 原子与场态的缠绕程度最深(见图 2(a) - 3(a)); 当  $\gamma$  值减小 ( $\beta_1 \neq \beta_2$ ) 时,  $\Delta_N$  不为零,  $\mathbf{R}(0)$  与  $\boldsymbol{\Omega}(0)$  不再垂直, 布赫矢量的进动范围减小, 从而导致回复幅度及最大场熵值的减小, 原子与场态的缠绕程度降低(见图 2(b)、图 3(b))。

**结 论** 综上所述: 1) 当原子两能级的斯塔克位移相等 ( $\beta_1 = \beta_2$ ) 时, 由斯塔克位移引起的依赖强度的有效失谐量  $\Delta_N = \beta_1 - \beta_2 = 0$ 。在此情况下, 原子反转及场熵演化现象与不考虑斯塔克位移时的完全一样; 2) 当原子两能级的斯塔克位移不等 ( $\beta_1 \neq \beta_2$ ) 时, 有效失谐量  $\Delta_N$  不再为零, 由此引起原子回去复周期及场熵演化周期减小, 回复幅度及最大场熵值减小。

在半经典理论范畴, 可借助光学布赫方程解释上述结论。

## 参 考 文 献

- [1] G. Rempe, H. Walther, N. Klein, Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(4): 353~356
- [2] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **A1**(6): 6023~6029

- [3] Mao-Fa Fang, Guang-Hui Zhou, Influence of atomic coherence on the evolution process. *Phys. Lett. (A)*, 1994, **A(1)** : 397~402
- [4] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, Periodicity, phase, and entropy in modes of two-photon resonance. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1990, **B7(1)** : 116~124
- [5] G. S. Agarwal, Field-correlation effects in multiphoton absorption process. *Phys. Rev. (A)*, 1970, **A1(5)** : 1445~1459
- [6] Lei Xu, Zhen-Fei Luo, Zhi-Ming Zhang, Validity of the effective Hamiltonian for the degenerate Raman process. *J. Phys. B: Atom Mol. Opt. Phys.*, 1994, **B27(6)** : 1649~1656
- [7] J. I. Cirac, L. L. Sanchez-Soto, Populations trapping in two-level models; spectral and statistical properties. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **A44(4)** : 3317~3324
- [8] A. Joshi, S. V. Lanwade, Effects of dipole interaction on the collapse-revival phenomenon of Rabi oscillations. *J. Mod. Opt.*, 1991, **38(5)** : 1407~1413
- [9] Lei Xu, Zhi-Ming Zhang, Modified effective Hamiltonian for degenerate Raman process. *Z. Phys. (B)*, 1994, **B95(2)** : 507~510
- [10] 郭光灿, 量子光学. 北京, 高等教育出版社, 1990 : 261~266
- [11] 彭金生, 共振荧光与超荧光. 北京, 科学出版社, 1993 : 1~4
- [12] H. I. Yoo, J. H. Eberly, Dynamical theory of an atom with two or three levels interacting with quantized cavity fields. *Phys. Rep.*, 1985, **118(5)** : 241~337
- [13] V. Buzek, H. Moya-Cessa, P. L. Knight, Schrödinger-Cat states in the resonant Jaynes-Cummings model; Collapse and revival of oscillations of the photon-number distribution. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **A45(11)** : 8190~8203

## Influence of the Stark Shift on the Atom Inversion and the Field Entropy in Degenerate Raman Process

Liu Xiang      Fang Maofa

(Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081)

(Received 22 July 1995; revised 29 November 1995)

**Abstract** In this paper, We study the atom-field coupled behavior for degenerate Raman process in the presence of the Stark shift, the influence of the Stark shift parameter on the atom inversion and the field entropy are discussed.

**Key words** degenerate Raman process, the Stark shift, the field entropy.